EINE EINFACHE METHODE ZUR BESTIMMUNG ELLIPTISCHER BAHNEN

AUS

DREI BEOBACHTUNGEN

VON

DR. W. EBERT,

Mit 5 Textfiguren.

VORGELEGT IN DER SITZUNG AM 26. OKTOBER 1905.

Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkungen.

Gauss hat für die Methoden zur Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei Beobachtungen einen Weg vorgezeichnet, der mit der Berechnung des Winkels am Planeten (im Dreiecke Sonne, Planet, Erde) zur Zeit der zweiten Beobachtung beginnt.

Schon in der Tatsache, daß das Problem so auf die Ermittlung einer einzigen Unbekannten zurückgeführt wird, dürfte (auch ganz abgesehen von der Bequemlichkeit der Form der transzendenten Grundgleichung) ein großer Vorteil liegen. Seine Methode hat nun im Laufe der Zeit eine Reihe von Abänderungen erfahren, die indessen doch nicht recht den Bedürfnissen der praktischen Anwendung zu ge-

nügen scheinen. Daher hat man in neuerer Zeit mehr und mehr Verfahren ausgebildet, bei denen zwei oder gar drei Unbekannte bestimmt werden müssen. Je unübersichtlicher und unbrauchbarer die Rechnungsvorschriften infolge der bis zu Dutzenden zählenden Glieder höherer Ordnung wurden, um so weniger hat man sich gefragt, wann die Berücksichtigung derselben überhaupt nötig ist.

Aber auch die Gauss'sche Methode und die ihr nachgebildeten leiden daran, daß man die Einwirkung der begangenen Vernachlässigungen auf das Resultat nicht überblicken kann. Ist ja doch der Begriff, Ordnung der Zwischenzeiten, nach dem gewöhnlich die Größe einer Vernachlässigung bemessen wird, ein recht unbestimmter. Eingehende Untersuchungen in dieser Richtung hat bisher nur Prof. Weiss in einer sehr inreressanten und inhaltsreichen Abhandlung angestellt.[1]

Denkt man sich die rechtwinkeligen heliozentrischen Koordinaten des Planeten und der Erde von einer bestimmten Epoche an nach Potenzen der Zwischenzeiten entwickelt, so sind diese Entwicklungen für den Planeten von viel stärkerer Konvergenz als für dle Erde, da der heliozentrische Radius-Vektor hier im Mittel etwa 2·5 mal größer ist. Wenn man also z. B. ein Glied als von der vierten Ordnung der Zwischenzeit (man sollte richtiger sagen: der Zwischenwinkel) bezeichnet, so ist es sehr wesentlich, ob es aus der Bewegung des Planeten oder der Erde entspringt. Es empfiehlt sich also jedenfalls, über die Bewegung der Erde keinerlei Annahme unter irgend welcher Form zu machen und die ganze Bahnbestimmung nur auf die Potenzreihen der Koordinaten des Planeten nach der Zeit zu stützen. Aber auch dann ist wieder ein Glied durch die Ordnung der Zwischenzeiten nur mangelhaft gekennzeichnet. Die Glieder, welche mit der Bahnexzentrizität verschwinden, sind nämlich im allgemeinen weniger einflußreich als die anderen. Man sollte also stets nicht nur die Ordnung der Zwischenzeit (immer bloß auf die Planetenbewegung bezogen) angeben, sondern auch die der Exzentrizität.

Auch in anderer Hinsicht leiden die Methoden zur Bestimmung elliptischer Bahnen an prinzipiellen Mängeln. Nachdem man sich in den Grundlagen der Rechnung bedenkliche Vernachlässigungen gestattet hat, glaubt man das Versäumte teilweise dadurch wieder einholen zu können, daß man die beiden äußeren Orte mit einem nicht zu unterschätzenden Arbeitsaufwande strenge darstellt. In keinem anderen Teile der Astronomie vernachlässiget man in der ersten Hälfte einer Rechnung gewisse Größen, um sie dann in der zweiten Hälfte derselben Rechnung zu berücksichtigen. So ist es auch hier leicht, eines der phoronomischen Bahnelemente, z. B. den Parameter, in einfacher Weise so zu bestimmen, daß die drei Orte hierunter weniger leiden, als unter den schon vorhergegangenen Vernachlässigungen.

Wir nehmen als Grundlage für unsere Methode an, daß für jede beliebige heliozentrische Koordinatenrichtung x die Gleichung:

$$x_1 T_1 + x_3 T_3 = x_2$$

besteht. Hierbei wollen wir für die Dreiecksflächen-Verhältnisse T_1 und T_3 möglichst geeignete Funktionen des zweiten heliozentrischen Radius-Vektors und der Zwischenzeiten wählen und führen dann diese Annahme konsequent und ohne irgend welche weitere Vernachlässigueg durch. Man kann so den im mittleren heliozentrischen Orte zu erwartenden Fehler, welcher durch die Annahmen über T_1 und T_3 bedingt wird, voraussagen und hieraus auf die zu erwartende Darstellung der mittleren Beobachtung schließen. Die Diskussion ergibt, daß man für größere Radien, wie $r = 3$ etwa bis zu 2 Monaten Gesamtintervall mit einer Hypothese auskommen kann. (Siehe das Loreleybeispiel, § 11.) Umsomehr lassen sich die allermeisten heutzutage vorkommenden Fälle innerhalb der Genauigkeitsgrenzen sechsstelliger Rechnung durch eine Annäherung lösen.

Sollte aber doch einmal ausnahmsweise die Bildung einer zweiten Hypothese erforderlich werden, so kann der Übergang auf dieselbe mit wenigen Zeilen Rechnung bewerkstelligt werden. (Siehe das Beispiel des § 12.)

[1] Prof. E. Weiss: Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschr. d. kais. Akad. d. Wissensch., mathem.-naturw. Kl., LX. Bd., p. 345 ff.

§ 1. Eine einfache Ableitung des Olbers'schen Grundprinzips.

Um geeignete Gesichtspunkte für die Aufstellung einer Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnen zu gewinnen, gehen wir von einer Betrachtung über das Olbers'sche Grundprinzip aus.

Es seien t_1, t_2 und t_3 die drei Beobachtungszeiten. Wir setzen ferner:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= t_3 - t_2, & \tau_3 &= t_2 - t_1, & \tau &= t_3 - t_1 = \tau_1 + \tau_3 \\ \vartheta_1 &= k\tau_1, & \vartheta_3 &= k\tau_3, & \vartheta &= k\tau = \vartheta_1 + \vartheta_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Wir betrachten nun die Bewegung des Kometen in einer beliebigen, heliozentrischen Koordinatenrichtung z und bezeichnen mit z_1, z_2 und z_3 die z-Koordinate des Kometen zu den drei Beobachtungszeiten. Man hat dann:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_2 - \vartheta_3 z_2' + \frac{\vartheta_3^2}{2} z_2'' - \frac{\vartheta_3^3}{6} z_2''' + \frac{\vartheta_3^4}{24} z_2^{IV} - \frac{\vartheta_3^5}{120} z_2^{V} \ldots \\ z_3 &= z_2 + \vartheta_1 z_2' + \frac{\vartheta_1^2}{2} z_2'' + \frac{\vartheta_1^3}{6} z_2''' + \frac{\vartheta_1^4}{24} z_2^{IV} + \frac{\vartheta_1^5}{120} z_2^{V} \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

wobei z_2', z_2'' etc. die Ableitungen von z_2 nach der Zeit, gemessen in Laplace'schen Zeiteinheiten. Demnach ist:

$$z_1 = z_2' \frac{dz_2}{d\vartheta}\frac{1}{k} = \frac{dz_2}{dt}; \qquad z_2'' = \frac{d^2 z_2}{d\vartheta^2} = -\frac{z_2}{r_2^3}$$

$$z_2''' = -\frac{z_2'}{r_2^3} + 3 z_2 X$$

$$z_2^{IV} = \frac{z_2}{r_2^6} + 6 z_2' X + 3 z_2 \Psi$$

$$z_2^{V} = \frac{z_2'}{r_2^6} \ldots,$$

wo:

$$X = \frac{1}{r_2^4}\left(\frac{dr_2}{d\vartheta}\right) = \frac{e \sin v_2}{r_2^4 \sqrt{p}}$$

$$\Psi = \frac{1}{r_2^4}\left(\frac{d^2 r_2}{d\vartheta^2}\right) - \frac{4}{r_2^5}\left(\frac{dr_2}{d\vartheta}\right)^2$$

$$= \frac{e \cos v_2}{r_2^6} - \frac{4e^2 \sin^2 v_2}{p r_2^5}. \qquad (2')$$

Hierbei bedeutet r_2 den heliozentrischen Radius-Vektor der zweiten Beobachtung.

Wir multiplizieren die erste der Gleichungen (2) mit ϑ_1, die zweite mit ϑ_3, addieren und dividieren gleichzeitig durch $\vartheta_1 + \vartheta_3$. Man findet so:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} z_1 + \frac{\vartheta_3}{\vartheta} z_3 = z_2\left(1 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_3}{2 r_2^3}\right) + \frac{1}{6}(\vartheta_1 - \vartheta_3)\vartheta_1\vartheta_3 z_2''' \ldots \qquad (3)$$

Diese Gleichung bleibt für unendlich kleine Zwischenzeiten endlich, d. h. sie gibt einen wirklichen Maßstab für die Ordnung der vernachlässigten Größen.

Der Term in z_2''' ist also dritter Ordnung. Er besteht nach (2′) aus 2 Bestandteilen, über deren gegenseitige Größe man bei Kometen im allgemeinen nichts weiß, da bei diesen Himmelskörpern die Bewegung im Radius-Vektor meistens von derselben Größenordnung ist, wie die im heliozentrischen Winkel.

Es bleibt daher hier kaum etwas anderes übrig, als den Term in z''' in erster Annäherung zu vernachlässigen, was insofern begründet ist, als er für gleiche Zwischenzeiten verschwindet.

Aus der Gleichung (3) läßt sich sehr leicht das Olber'sche Grundprinzip gewinnen.

Hierzu legen wir die z-Richtung, die bisher noch unbestimmt war, senkrecht zu dem größten Kreise durch den zweiten Sonnenort und den zweiten Kometenort. Demgemäß sind z_2 sowie $\mathfrak{Z}_2$ (die entsprechende, geozentrische Sonnenkoordinate) gleich Null. Man hat also für beide Körper:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\vartheta_1}{\vartheta} z_1 + \frac{\vartheta_3}{\vartheta} z_3 &= \frac{1}{6} (\vartheta_1 - \vartheta_3) \vartheta_1 \vartheta_3 z_2''' \dots \\ \frac{\vartheta_1}{\vartheta} \mathfrak{Z}_1 + \frac{\vartheta_3}{\vartheta} \mathfrak{Z}_3 &= \frac{1}{6} (\vartheta_1 - \vartheta_3) \vartheta_1 \vartheta_3 \mathfrak{Z}_2''' \dots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung setzen wir aus den soeben angeführten Gründen gleich Null.

Da die Kometen im Durchschnitt etwa in der Entfernung 1 von der Sonne entdeckt werden, so ist für sie $\mathfrak{Z}_2'''$ von derselben Größenordnung wie z_2''' und kann daher in (4) vernachlässigt werden. Der Übersichtlichkeit halber behalten wir aber diese Glieder vorläufig noch bei und addieren (die beiden Gleichungen (4). Dann ergibt sich:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} (z_1 + \mathfrak{Z}_1) + \frac{\vartheta_3}{\vartheta} (z_3 + \mathfrak{Z}_3) = \frac{1}{6} \vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_1 - \vartheta_3) (z_2''' + \mathfrak{Z}_2''') \dots \tag{5}$$

Nun sind aber $z_1 + \mathfrak{Z}_1$ und $z_3 + \mathfrak{Z}_3$ die geozentrischen Koordinaten des Kometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung senkrecht zu obigem größten Kreise. Bezeichnen wir daher mit ρ_1 und ρ_3 die geozentrischen Distanzen des Kometen für diese Zeiten und die zugehörigen sphärischen Abstände von dem größten Kreise mit h_1 und h_3 (beide nach derselben Seite positiv gerechnet), so ist allgemein:

$$z_1 + \mathfrak{Z}_1 = \rho_1 \sin h_1 \qquad\qquad z_3 + \mathfrak{Z}_3 = \rho_3 \sin h_3, \tag{6}$$

wobei übrigens h_1 und h_3 stets von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Man hat dann aus (5) und (6):

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta} \rho_1 \sin h_1 + \frac{\vartheta_3}{\vartheta} \rho_3 \sin h_3 = \frac{z_2''' + \mathfrak{Z}_2'''}{6} \vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_1 - \vartheta_3)$$

oder

$$\frac{\rho_3}{\rho_1} = - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} \frac{\sin h_1}{\sin h_3} + \frac{z_2''' + \mathfrak{Z}_2'''}{6} \cdot \frac{\vartheta \vartheta_1 (\vartheta_1 - \vartheta_3)}{\rho_1 \sin h_3}. \tag{7}$$

ρ_1 und ρ_3 sind, wie gesagt, die wirklichen geozentrischen Distanzen des Kometen. Setzt man den zweiten Term der rechten Seite gleich Null und drückt $\sin h_1$ und $\sin h_3$ durch die geozentrischen Polarkoordinaten des Kometen und der Sonne aus, so erhält man das Olbers'sche Prinzip. Der vernachlässigte Term der rechten Seite annulliert sich für gleiche Zwischenzeiten und ist von der zweiten Ordnung derselben. Denn die Größe $\sin h_3$ verschwindet für unendlich kleine Zwischenzeiten und ist, wie man sich leicht überzeugt, von der ersten Ordnung.

Aus dieser Ableitung geht hervor, daß das Olbers'sche Prinzip keinerlei Voraussetzungen über die Dreiecksflächen, sondern nur über eine spezielle Koordinatenrichtung (die Richtung senkrecht zum größten Kreise ☌$_2$ ☉$_2$) enthält. Für diese einzige Richtung wird vorausgesetzt, daß

$$\begin{aligned} z_1 \vartheta_1 + z_3 \vartheta_3 &= 0 \\ \mathfrak{Z}_1 \vartheta_1 + \mathfrak{Z}_3 \vartheta_3 &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Mit anderen Worten: man betrachtet die Bewegung in diesen Koordinaten als der Zeit proportional, sowohl für die Sonne als für den Kometen.

§ 2. Eine naheliegende Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnen.

Das im vorigen Paragraphen Gesagte führt unmittelbar zu einer einfachen Methode, elliptische Bahnen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Gleichung (3) als für jede beliebige Koordinatenrichtung gültig und haben nun zunächst nachzuweisen, wie unter dieser Voraussetzung der heliozentrische Radius-Vektor r_2 zur Zeit der zweiten Beobachtung bestimmt werden kann.

Dazu legen wir die z-Richtung senkrecht zu dem größten Kreise $P_1 P_3$ (siehe Fig. 1), der durch die erste und dritte Beobachtung des Planeten hindurchgeht. Bezeichnet man dann die entsprechenden terrestrischen Koordinaten des Planeten mit ζ_1, ζ_2 und ζ_3, diejenigen der Sonne mit $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ und $\mathfrak{Z}_3$, so ist nach der Definition der z Richtung:

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= 0 = z_1 + \mathfrak{Z}_1 \\ \zeta_2 &= \rho_2 \sin h_2 = z_2 + \mathfrak{Z}_2 \\ \zeta_3 &= 0 = z_3 + \mathfrak{Z}_3, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

wobei ρ_2 die geozentrische Distanz zur Zeit der zweiten Beobachtung und $h_2 = P_2 N$ (siehe Fig. 1) der entsprechende sphärische Abstand des Planeten von dem größten Kreise ist (positiv gerechnet im Sinne der wachsenden z).

Wenn wir die Werte, die sich für z aus (9) ergeben, in (3) substituieren, so folgt:

$$-\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\mathfrak{Z}_1 - \frac{\vartheta_3}{\vartheta}\mathfrak{Z}_3 = \left(1 - \frac{\vartheta_1 \vartheta_3}{2 r_2^3}\right)(\rho_2 \sin h_2 - \mathfrak{Z}_2) + \frac{1}{6}\vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_1 - \vartheta_3) z_2'''. \tag{10}$$

Diese Gleichung enthält von dem letzten Gliede abgesehen, zwei Unbekannte: r_2 und ρ_2. Zwischen diesen beiden Größen besteht aber bekanntlich eine Gleichung, weil man für die zweite Beobachtung in

Fig. 1.

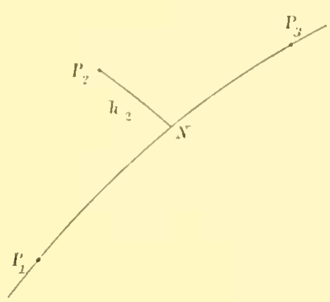
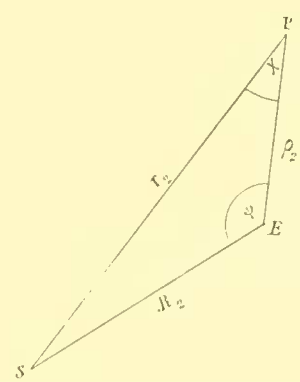


Fig. 2.



dem Dreiecke Erde (E) — Sonne (S) — Planet (P) (Fig. 2) den Winkel ψ an der Erde und die Distanz Sonne—Erde R_2 kennt.

Es ist nämlich:

$$r_2^2 = R_2^2 + \rho_2^2 - 2 R_2 \rho_2 \cos \psi. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) können demnach ρ_2 und r_2 bestimmt werden.

Einfacher erhält man dieselben durch Einführen des Winkels χ am Planeten zur Zeit der zweiten Beobachtung. Man sieht, daß:

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \frac{\sin \psi}{\sin \chi} R_2 \\ \rho_2 &= \frac{\sin(\chi + \psi)}{\sin \chi} R_2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Wir setzen diese Werte in (10) ein und lassen auf der rechten Seite den Term in z_2''' weg. Dann folgt leicht:

$$\left.\begin{aligned}\sin\chi\left[-\mathfrak{z}_1\frac{\vartheta_1}{\vartheta}-\mathfrak{z}_3\frac{\vartheta_3}{\vartheta}+\mathfrak{z}_2-R_2\sin h_2\cos\psi\right]&=\\ =\frac{\sin^1\chi\,\vartheta_1\vartheta_3}{2(R_2\sin\psi)^3}\{\mathfrak{z}_2-R_2\sin h_2\cos\psi\}&+\cos\chi R_2\sin\psi\sin h_2\\ &-\sin^3\chi\cos\chi\frac{\sin\psi\sin h_2 R_2\vartheta_1\vartheta_3}{2(R_2\sin\psi)^3}.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Wir setzen nun zunächst:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\vartheta_1}{\vartheta}=\nu_1,\qquad\frac{\vartheta_3}{\vartheta}=\nu_3,\\ &E''=\mathfrak{z}_2-R_2\sin h_2\cos\psi\\ &F''=\mathfrak{z}_1\nu_1+\mathfrak{z}_3\nu_3\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

und weiter:

$$\begin{aligned}a''\cos A''&=E'' & c''\cos C''&=E''-F''\\ a''\sin A''&=R_2\sin h_2\sin\psi & c''\sin C''&=R_2\sin h_2\sin\psi.\end{aligned}\qquad(15)$$

Dann wird (13):

$$\sin(\chi-C'')=h''\sin^3\chi\sin(\chi-A''),\qquad(16)$$

wobei:

$$h''=\frac{a''\vartheta_1\vartheta_3}{2c''(R_2\sin\psi)^3}=\frac{k^2a''(t_3-t_2)(t_2-t_1)}{2c''(R_2\sin\psi)^3}.\qquad(16\,b)$$

Die Gleichung (16) ist kaum schwerer aufzulösen als die Gauss'sche, aber wesentlich genauer. Denn A'', das Gauss vernachlässigt, ist nach (15) und (14) von derselben Größenordnung wie h_2, also von der zweiten Ordnung der Zwischenzeiten und kann, wie aus den weiterhin gegebenen Beispielen hervorgeht, auf mehr als 1° anwachsen.

Kennt man nun einmal χ, so ergeben sich aus (12) zunächst r_2 und ρ_2. Zur Bestimmung von ρ_1 und ρ_3 folgen dann aus (3) (auf alle Koordinatenrichtungen angewandt) und den übrigen Beobachtungsdaten lineare Gleichungen, deren Auflösung keine weitere Schwierigkeit bietet.

Wir könnten also bereits bei dieser Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnen stehen bleiben.

Indessen wird man durch die Kleinheit der Bahnexzentrizitäten der Asteroiden darauf hingewiesen, noch weiter zu gehen.

Wesentlich unterstützt wird man hierbei durch eine merkwürdige Eigenschaft der Gleichung (16), die wir später kennen lernen werden. Sie kann, ohne ihre Form zu ändern, Terme wesentlich höherer Ordnung in sich aufnehmen.

§ 3. Über die Zusammensetzung des dritten und vierten Differentialquotienten einer Koordinate.

Bei Kometenbahnen kann man, wie wir schon oben sagten, die Annäherung nicht weiter treiben, weil der dritte Differentialquotient einer Koordinate aus zwei Teilen besteht, über deren gegenseitige Größe man in diesem Falle im voraus nichts weiß. Für die kleinen Planeten verhält sich das aber anders, weil hier die Bahn immer mit einer gewissen Annäherung als kreisförmig angesehen werden kann.

Betrachten wir also hier den Ausdruck:

$$\frac{d^3z_2}{d\vartheta^3}=-\frac{z_2'}{r_2^3}+\frac{3z_2}{r_2^4}r_2',\qquad(17)$$

so kann man den Term in r_2' im allgemeinen als kleiner betrachten, als den in z_2'.

In der Tat, das äußerste Maximum, das z_2' erreichen kann, ist bis auf Glieder von der Größenordnung der Exzentrizität:

$$z_2' = r_2 \frac{d v_2}{d \vartheta}. \tag{18a}$$

Anderseits ist:

$$\frac{d r_2}{d \vartheta} = e \sin v_2 \frac{r_2^2}{p} \cdot \frac{d v_2}{d \vartheta}. \tag{18b}$$

Das Maximum, das z_2 erreichen kann, ist (wiederum bis auf Glieder von der Größenordnung der Exzentrizität) r_2.

Man hat also immer innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze:

$$\left.\begin{aligned} \frac{z_2'}{r_2^3} &< \frac{1}{r_2^2} \frac{d v_2}{d \vartheta}. \\ \frac{3 z_2}{r_2^4} r_2' &< \frac{3}{r_2^2} e \frac{d v_2}{d \vartheta} \sin v_2. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Also nur, wenn $e > \frac{1}{3}$, kann der Maximalbetrag des Terms in r_2' denjenigen des andern Terms in $\frac{d^3 z_2}{d \vartheta^3}$ übersteigen; indessen ist dies auch nur dann möglich, wenn $v_2 = 90°$ oder $270°$.

Für $v_2 = 0$ oder $180°$ ist der Term in r_2' für jede beliebige Koordinatenrichtung Null. Darum empfiehlt es sich, den ersten Term in $\frac{d^3 z_2}{d \vartheta^3}$ zu berücksichtigen, auch wenn man den zweiten mit r_2' vernachlässigen will.

Ähnliches gilt auch von dem vierten Differentialquotienten z_2^{IV}. Man hat nach (2') p. 3:

$$z_2^{IV} = \frac{z_2}{r_2^6} + \frac{6 z_2' r_2'}{r_2^4} + \frac{3 z_2 r_2''}{r_2^4} - \frac{12 z_2 r_2'^2}{r_2^5}. \tag{20}$$

Das letzte Glied ist von der zweiten Ordnung der Exzentrizität und wir lassen es daher beiseite.

Mit Rücksicht darauf, daß $\frac{d v_2}{d \vartheta} = \frac{\sqrt{p}}{r_2^2}$ folgt aus (18b):

$$\left.\begin{aligned} r_2' &= \frac{d r_2}{d \vartheta} = \frac{e \sin v_2}{\sqrt{p}} \\ r_2'' &= \frac{d^2 r_2}{d \vartheta^2} = \frac{e \cos v_2}{r_2^2} \end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

und somit wird (20) bei Vernachlässigung zweiter Potenzen der Exzentrizität:

$$z_2^{IV} = \frac{z_2}{r_2^6} + \frac{6 e \sin v_2}{r_2^{\frac{9}{2}}} z_2' + \frac{3 e \cos v_2}{r_2^6} z_2. \tag{21}$$

In dieser Formel kann man mit derselben Annäherung setzen:

$$z_2 = r_2 a' \sin (A' + v_2), \qquad z_2' = \frac{a' \cos (A' + v_2)}{\sqrt{r_2}},$$

wobei a' und A' die zur z-Koordinate gehörigen Gauss'schen Konstanten.

Das Maximum des ersten Gliedes in z_2^{IV} ist $\frac{1}{r_2^5}$.

Für die folgenden Glieder hat man:

$$\frac{3a'e}{r_2^5}\{2 \sin v_2 \cos (A'+v_2)+\cos v_2 \sin (A'+v_2)\}.$$

Die Klammer nimmt bei Einführung von $2v_2$ statt v_2 die Form: $\frac{3}{2}\sin(2v_2+A')-\frac{1}{2}\sin A'$ mit dem offenbaren Maximum zwei an.

Da anderseits a' die Einheit nicht übersteigen kann, so ist also das Maximum der Glieder erster Ordnung in e: $\frac{6e}{r_2^5}$.

Demnach ist das zweite Glied in z_2^{IV} im allgemeinen weniger wichtig als das erste, solange $e < \frac{1}{6}$.

§ 4. Verbesserung der in § 2 gegebenen Methode.

Die im vorigen Paragraphen erhaltenen Resultate legen es nahe, eine weitere Verbesserung der in § 2 dargelegten Methode anzustreben.

Man kann zunächst in den Reihen (2) z' schon mit Rücksicht auf die Terme dritter Ordnung der Zwischenzeiten eliminieren und findet so:

$$\frac{z_1\vartheta_1}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_1^2}{6r_2^3}\right)+\frac{z_3\vartheta_3}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_3^2}{6r_2^3}\right)=z_2\left(1-\frac{\vartheta^2}{6r_2^3}\right). \tag{22}$$

Diese Gleichung kann wieder als Ausgangspunkt einer Bahnbestimmungsmethode verwendet werden.

Auch hier nimmt die Gleichung in χ wieder die Form (16) an und der Term mit r_2' in z_2''' verschwindet bei gleichen Zwischenzeiten, für Perihel und Aphel und schließlich für $e=0$. Man kann also trotz der Vernachlässigung des zweiten Termes in z_2''' die Berücksichtigung des von der Exzentrizität unabhängigen Termes in z_2^{IV} in Erwägung ziehen.

Bei Unterdrückung der Glieder in r_2', r_2'' etc. lassen sich die Reihen (2) bis auf sechste Potenzen der Zwischenzeiten schreiben:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_2\left(1-\frac{\vartheta_3^2}{2r_2^3}+\frac{\vartheta_3^4}{24r_2^6}\right)-z_2'\vartheta_3\left(1-\frac{\vartheta_3^2}{6r_2^3}+\frac{\vartheta_3^4}{120r_2^6}\right)\\ z_3 &= z_2\left(1-\frac{\vartheta_1^2}{2r_2^3}+\frac{\vartheta_1^4}{24r_2^6}\right)+z_2'\vartheta_1\left(1-\frac{\vartheta_1^2}{6r_2^3}+\frac{\vartheta_1^4}{120r_2^6}\right).\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Durch Elimination von z_2' ergibt sich hieraus, indem wir gleich durch $\vartheta=\vartheta_1+\vartheta_3$ dividieren:

$$\frac{z_1\vartheta_1}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_1^2}{6r_2^3}+\frac{\vartheta_1^4}{120r_2^6}\right)+\frac{z_3\vartheta_3}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_3^2}{6r_2^3}+\frac{\vartheta_3^4}{120r_2^6}\right)=z_2\left(1-\frac{\vartheta^2}{6r_2^3}+\frac{\vartheta^4}{120r_2^6}\dots\right) \tag{24}$$

Diese Gleichung hätte auch direkt durch Betrachtung einer Kreisbahn mit dem Radius r_2 abgeleitet werden können, was ja auf die Vernachlässigung von r_2', r_2'' u. s. w. hinausläuft. Sie unterscheidet sich von (22) durch die Terme vierter Potenz in der Klammer. Indessen würden wir durch Beibehalten derselben die zur Bestimmung von χ so günstige Gleichungsform (16) verlieren, welche für (22) noch besteht. Wir können aber (22) unter Beibehaltung seiner Form wesentlich verschärfen.

Wir betrachten die Gleichung (24) für gleiche Zwischenzeiten. Dann ist: $\vartheta_3=\vartheta_1$ und $\vartheta=2\vartheta_1$.

Die Terme vierter Ordnung in den Klammern sind dann:

$$\frac{\vartheta_1^4}{120\, r_2^6}, \qquad \frac{\vartheta_1^4}{120\, r_2^6} \text{ und } \frac{2\,\vartheta_1^4}{15\, r_2^6}.$$

Wären diese Terme alle unter sich gleich, z. B. gleich $\frac{c\,\vartheta_1^4}{r_2^6}$, so könnte man in diesem Falle die ganze Gleichung durch $1+\frac{c\,\vartheta_1^4}{r_2^6}$ dividieren und würde so eine (22) analoge Form erhalten.

Nun ist (22) durch die Elimination der Terme dritter Ordnung aus den Reihen (2) erhalten worden, während in (24) die Terme fünfter Ordnung der Zwischenzeiten eliminiert sind. Wenn sich also (24) bei gleichen Zwischenreihen durch $1+\frac{c\,\vartheta_1^4}{r_2^6}$ teilen ließe, so würde man hieraus schließen können, daß in diesem Falle (22) die Terme vierter und fünfter Ordnung aus (2) eliminiert. Nun hat, wie gesagt, (22) diese Eigenschaft nicht.

Multipliziert man aber (24) mit dem Faktor $1+\frac{\lambda\,\vartheta^2}{r_2^3}$, wo λ eine später zu bestimmende Zahl bedeutet, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z_1\,\vartheta_1}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_1^2}{6\,r_2^3}+\frac{\lambda\,\vartheta^2}{r_2^3}+\frac{\vartheta_1^4}{120\,r_2^6}-\frac{\lambda\,\vartheta_1^2\,\vartheta^2}{6\,r_2^6}\right)\\ &+\frac{z_3\,\vartheta_3}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta_3^2}{6\,r_2^3}+\frac{\lambda\,\vartheta^2}{r_2^3}+\frac{\vartheta_3^4}{120\,r_2^6}-\frac{\lambda\,\vartheta_3^2\,\vartheta^2}{6\,r_2^6}\right)=z_2\left(1-\frac{\vartheta^2}{6\,r_2^3}+\frac{\lambda\,\vartheta^2}{r_2^3}+\frac{\vartheta^4}{120\,r_2^6}-\frac{\lambda\,\vartheta^4}{6\,r_2^6}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Setzt man nun wieder:

$$\vartheta_3=\vartheta_1, \qquad \vartheta=2\,\vartheta_1,$$

so ergeben sich als Terme vierter Ordnung in den beiden ersten Klammern:

$$\frac{\vartheta_1^4}{120\,r_2^6}-\frac{4\lambda\,\vartheta_1^4}{6\,r_2^6}$$

und in der letzten Klammer:

$$\frac{16\,\vartheta_1^4}{120\,r_2^6}-\frac{16\lambda\vartheta_1^4}{6\,r_2^6}.$$

Durch Gleichsetzung beider Ausdrücke ergibt sich $\lambda=\frac{1}{16}$ und wir schließen daraus, daß die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &z_1\,\frac{\vartheta_1}{\vartheta}\left\{1+\frac{1}{r_2^3}\left(\frac{\vartheta^2}{16}-\frac{\vartheta_1^2}{6}\right)\right\}\\ &+z_3\,\frac{\vartheta_3}{\vartheta}\left\{1+\frac{1}{r_2^3}\left(\frac{\vartheta^2}{16}-\frac{\vartheta_3^2}{6}\right)\right\}=z_2\left\{1-\frac{5}{48}\,\frac{\vartheta^2}{r_2^3}\right\}+F\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

ein Restglied F hat, in dem der Hauptterm in z_2^{IV} und z_2^{V} für gleiche Zwischenzeiten verschwindet. Bei Weglassung von F nimmt die Bestimmungsgleichung für den Winkel am Planeten wieder die Form (16) an.

§ 5. Das Restglied F der Gleichung (26) und seine geometrische Bedeutung.

Bevor wir Gleichung (26) der Bahnbestimmung zu Grunde legen, wollen wir untersuchen, welchen Einfluß die Vernachlässigung von F auf das Resultat haben kann. Hierzu leiten wir zunächst analytische Ausdrücke für die hauptsächlichsten Glieder ab, aus denen sich F zusammensetzt.

Wir beginnen mit F_1, dem Hauptterm vierter Ordnung der Zwischenzeiten, der sich nach dem vorigen für gleiche Zwischenzeiten wegheben muß.

Indem man (24) von (26) abzieht, ergibt sich zunächst:

$$\left.\begin{aligned} F = {} & \frac{z_1 \vartheta_1}{\vartheta} \left\{ \frac{\vartheta^2}{16 r_2^3} - \frac{\vartheta_1^4}{120 r_2^6} \right\} + \frac{z_3 \vartheta_3}{\vartheta} \left\{ \frac{\vartheta^2}{16 r_2^3} - \frac{\vartheta_3^4}{120 r_2^6} \right\} \\ & - z_2 \left\{ \frac{1}{16} \frac{\vartheta^2}{r_2^3} - \frac{\vartheta^4}{120 r_2^6} \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Setzt man in diese Gleichung die Reihen (2) für z_1 und z_3 ein, so folgt:

$$F_1 = \frac{\vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_3 - \vartheta_1)^2}{96 r_2^6} z_2. \tag{28a}$$

Durch Vergleich von (26) mit den Reihen (2) ergibt sich ferner für die von der Exzentrizität abhängigen Terme in F:

$$\left.\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_1 - \vartheta_3) z_2 X \\ F_3 &= \frac{\vartheta_1 \vartheta_3}{24} (\vartheta_3^2 - \vartheta_3 \vartheta_1 + \vartheta_1^2)(6 z_2' X + 3 z_2 \Psi). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Man erkennt ferner leicht, daß sich die Glieder fünfter Ordnung für gleiche Zwischenzeiten in F wegheben würden (wie übrigens alle Terme ungerader Ordnung).

F hat eine einfache geometrische Bedeutung.

Zunächst bemerkt man, daß F allgemein die Form:

$$F = z_2 N + z_2' N' \tag{29}$$

hat, wobei N und N' Funktionen der Zwischenzeiten, des Radius-Vektors zur Zeit der zweiten Beobachtung und seiner sukzessiven Ableitungen nach der Zeit bedeuten. Die Form (29) bringt es mit sich, daß F senkrecht zur Bahnebene gleich Null ist.

In der Bahnebene selbst lassen sich die F nach (29) genau so durch Projektion transformieren, wie die Koordinaten und Geschwindigkeiten selbst. Wir denken uns nun, daß am Schlusse der Bahnbestimmung, wie das gewöhnlich der Fall ist, die beiden äußeren Punkte der Bahn heliozentrisch vollständig festgelegt sind. Ihre Koordinaten x_1, y_1, z_1 und x_3, y_3, z_3 sind dann also gegeben und man berechnet aus ihnen die Bahnebene und schließlich den zweiten heliozentrischen Ort, dessen Koordinaten x_2, y_2 und z_2 seien.

Dann genügen diese Kepler'schen x, y und z den Gleichungen (26), wo F zur jeweiligen Achsenrichtung gehört.

In F wären ebenfalls die auf diesem Wege gefundenen Kepler'schen $x_2, y_2, z_2, x_2', y_2'$ und z_2' zu substituieren.

Anderseits haben wir die x, y und z so bestimmt, daß sie den Gleichungen (26) ohne F genügen.

Hieraus resultiert bei gleichen äußeren heliozentrischen Orten ein anderer mittlerer heliozentrischer Ort (x_2), (y_2), (z_2) mit dem Radius-Vektor (r_2).

Bei Berechnung dieser Größen ist die mittlere Beobachtung benutzt und man könnte sie also gewissermaßen als den beobachteten heliozentrischen Ort bezeichnen, im Gegensatze zu dem aus den äußeren Orten mittels der Kepler'schen Gesetze berechneten mittleren Ort x_2, y_2 und z_2.

Die Differenzen:

$$(x_2)-x_2,\ (y_2)-y_2 \text{ und } (z_2)-z_2$$

repräsentieren also heliozentrisch die Darstellung des mittleren Ortes im Sinne Beobachtung minus Rechnung.

Der Gleichung (26) steht nach dem Vorhergehenden die folgende gegenüber:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{z_1\vartheta_1}{\vartheta}\left\{1+\frac{1}{(r_2)^3}\left(\frac{\vartheta^2}{16}-\frac{\vartheta_1^2}{6}\right)\right\} \\ +&\frac{z_3\vartheta_3}{\vartheta}\left\{1+\frac{1}{(r_2)^3}\left(\frac{\vartheta^2}{16}-\frac{\vartheta_3^2}{6}\right)\right\}= \\ &(z_2)\left\{1-\frac{5}{48}\frac{\vartheta^2}{(r_2)^3}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (26')$$

Die Klammern beider Gleichungen unterscheiden sich nur durch Terme zweiter Potenz der Zwischenzeiten, multipliziert in die Differenz von (r_2) und r_2, also nur Glieder höherer Ordnung. Man kann daher die Klammern in beiden Gleichungen als gleich betrachten und findet dann durch Subtraktion derselben für eine beliebige Koordinatenrichtung:

$$0=\{z_2-(z_2)\}\left(1-\frac{5}{48}\frac{\vartheta^2}{r_2^3}\right)+F \qquad (30a)$$

oder genähert:

$$(z_2)-z_2=F=z_2N+z_2'N'. \qquad (30b)$$

F ist also bis auf Glieder höherer Ordnung die heliozentrische Darstellung des mittleren Ortes.

Legt man die z-Richtung in den Radius-Vektor, so hat man im Sinne Beobachtung minus Rechnung:

$$\Delta r=r_2N+r_2'N'. \qquad (31a)$$

Legt man sie hingegen senkrecht zum zweiten Radius-Vektor, so folgt:

$$r_2\Delta v_2=r_2v_2'N'. \qquad (31b)$$

Nun sind bei unserer Methode die wichtigsten Glieder in N und N' von der ersten Ordnung der Exzentrizität.

Man kann daher in den vorstehenden Gleichungen mit Vernachlässigung zweiter Potenzen der Exzentrizität setzen:

$$r_2'=0, \qquad v_2'=\frac{1}{r_2^{\frac{3}{2}}}.$$

und findet dann:

$$\left.\begin{aligned} \Delta r&=r_2N \\ \Delta v_2&=\frac{N'}{r_2^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Diese beiden Größen gehen in verschiedener Weise in den geozentrischen Ort ein.

Unter der Annahme, daß zur Zeit der zweiten Beobachtung Sonne, Erde und Planet genau in einer geraden Linie stehen, ergibt sich für den aus Δv_2 resultierenden Fehler im geozentrischen Ort $(\Delta\lambda)$:

$$(\Delta\lambda)'' = \frac{r_2 \Delta v_2}{(r_2-1)\sin 1''} = \frac{N'}{\sqrt{r_2}\,(r_2-1)\sin 1''}. \tag{33}$$

Der Fehler in v_2 geht also vergrößert in den geozentrischen Ort ein. Anderseits findet man leicht aus dem Dreiecke Sonne—Erde—Planet zur zweiten Beobachtung (siehe Fig. 2) unter Konstanthaltung des Winkels an der Sonne (da ja der Einfluß eines Fehlers in v für sich betrachtet wird):

$$\Delta\psi = \frac{\Delta r}{\rho}\sin\chi, \tag{34a}$$

wofür man überschlagsweise setzen kann:

$$(\Delta\psi)'' = \frac{r_2 N}{r_2-1}\,\frac{\sin\chi}{\sin 1''}. \tag{34}$$

Der Winkel χ würde Null sein, wenn zur Zeit der zweiten Beobachtung Sonne, Erde und Planet auf einer geraden Linie stehen.

Diese Bedingung ist nun immer näherungsweise erfüllt, so daß der Fehler in r_2 nur mit verhältnismäßig geringen Beträgen in den mittleren Ort eingeht. Ich habe in der Literatur kein Beispiel finden können, in welchem χ 14° übersteigt. Setzt man also in (34) $\sin\chi = \frac{1}{4}$ ($\chi = 14°\,29'$), so ist das jedenfalls hoch gegriffen. Man hat unter dieser Annahme:

$$(\Delta\psi)'' = \frac{r_2 N}{4\,(r_2-1)\sin 1''}. \tag{35}$$

§ 6. Die zu erwartende Darstellung des mittleren Ortes.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen erlauben, die bei Anwendung unserer Methode zu erwartende Darstellung des zweiten geozentrischen Ortes voraus zu sagen.

Stellt man N und N' aus F_1, F_2 und F_3 nach (28) und (28a) zusammen, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{\vartheta_1\vartheta_3(\vartheta_3-\vartheta_1)^2}{96\,r_2^6} + \frac{1}{2}\vartheta_1\vartheta_3(\vartheta_1-\vartheta_3)\,X \\ &\quad + \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{8}(\vartheta_3^2-\vartheta_3\vartheta_1+\vartheta_1^2)\,\Psi \\ N' &= \frac{\vartheta_1\vartheta_3}{4}(\vartheta_3^2-\vartheta_3\vartheta_1+\vartheta_1^2)\,X, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

worin wir nach (2') mit Vernachlässigung zweiter Potenzen der Exzentrizität setzen:

$$X = \frac{e\sin v_2}{r_2^{\frac{9}{2}}}, \qquad \Psi = \frac{e\cos v_2}{r_2^6}. \tag{36a}$$

Wir betrachten zunächst N' unter der Annahme: $e\sin v_2 = 0.1$, was etwa dem großen Durchschnitt aller Fälle entsprechen dürfte.

Der Einfluß eines Gliedes ändert sich sehr, je nach der Entfernung des Planetoiden von der Sonne, ein Umstand, auf den wohl zuerst Herr Prof. W e i s s in der in der Einleitung zitierten Arbeit mit gebührendem

Nachdrucke hingewiesen hat. Wir berechnen also $(\Delta\lambda'')$, den durch N' verursachten Fehler im zweiten geozentrischen Ort, für $r = 2.0$, 2.5 und 3.0, entsprechend dem inneren, mittleren und äußeren Teile des Asteroidenringes.

Man findet für gleiche Zwischenzeiten nach dem Gesagten aus N':

$$\Delta\lambda'' = \frac{k^4\tau^4}{640 \sin 1'' r_2^5(r_2-1)} = [5.45058] \frac{\tau^4}{r_2^5(r_2-1)}, \tag{37}$$

wobei τ das Gesamtintervall in mittleren Sonnentagen. Für etwas ungleiche Zwischenzeiten würde dieses Resultat nur unwesentlich geändert werden.

Aus (37) ergibt sich für $\Delta\lambda''$ geozentrisch folgende Zusammenstellung:

Gesamt-intervall	$r = 2.0$	$r = 2.5$	$r = 3.0$
30d	0''.7	0''.2	0''.0
35	1.3	0.3	0.1
40	2.3	0.5	0.1
45	3.6	0.8	0.2
50	5.5	1.2	0.4
55	8.1	1.8	0.5
60	11.4	2.5	0.8

Dieses Glied in der Darstellung des mittleren Ortes ist bei weitem das wichtigste, da es für gleiche Zwischenzeiten nicht verschwindet und von $\sin\chi$ nicht beeinflußt wird.

Man kann also nur ausnahmsweise erwarten, daß man mit unserer Methode mit einer Hypothese auskommt, wenn sich die Beobachtungen über zwei Monate erstrecken. (Wir werden im § 11 ein solches Beispiel kennen lernen.)

Hingegen liegen die Verhältnisse für 40 und selbst 45 Tage Gesamtintervall noch recht günstig.

Wir prüfen nun den Einfluß des Termes in N, der von Ψ abhängt.

Unter der Annahme $e \cos v_2 = 0.1$ wird derselbe für gleiche Zwischenzeiten:

$$\frac{k^4\tau^4}{1280 r_2^6},$$

wo τ wiederum das Gesamtintervall, woraus mittels (34):

$$\Delta\psi'' = \frac{k^4\tau^4}{5120(r_2-1)r_2^5 \sin 1''}.$$

Dieser Ausdruck ist also achtmal kleiner, als der vorher besprochene (selbst unter der extremen Annahme $\sin\chi = 0.25$) und hat somit für unsere Diskussion keine wesentliche Bedeutung.

Der Term $\frac{1}{2}\vartheta_1\vartheta_3(\vartheta_1-\vartheta_3)X$ in N geht unter Beibehaltung unserer Annahmen in $\Delta\psi$ mit folgendem Betrage ein:

$$\Delta\psi'' = \frac{k^3\tau_1\tau_3(\tau_1-\tau_3)}{80 r_2^{\frac{7}{2}}(r_2-1)\sin 1''}, \tag{39}$$

wo τ_1 und τ_3 durch (1) definiert sind.

Durch Anwendung dieser Formel ergibt sich für $\Delta\psi''$ geozentrisch folgende Zusammenstellung:

Gesamtintervall	Teilintervalle		$r = 2.0$	$r = 2.5$	$r = 3.0$
20d	6d	14d	0″8	0″3	0″1
	7	13	0.7	0.2	0.1
	8	12	0.5	0.1	0.0
	9	11	0.3	0.1	0.0
25d	7	18	1.6	0.5	0.2
	8	17	1.4	0.4	0.2
	9	16	1.2	0.4	0.2
	10	15	0.9	0.3	0.1
	11	14	0.6	0.2	0.1
	12	13	0.2	0.0	0.0
30d	9	21	2.7	0.8	0.3
	10	20	2.4	0.7	0.3
	11	19	2.0	0.6	0.2
	12	18	1.5	0.5	0.2
	13	17	1.1	0.3	0.1
	14	16	0.5	0.2	0.1
35d	12	23	3.5	1.1	0.4
	13	22	3.0	0.9	0.4
	14	21	2.4	0.8	0.3
	15	20	1.8	0.5	0.2
	16	19	1.1	0.3	0.1
	17	18	0.4	0.1	0.0
40d	15	25	4.4	1.3	0.5
	16	24	3.6	1.1	0.5
	17	23	2.7	0.8	0.3
	18	22	1.9	0.5	0.2
	19	21	1.0	0.3	0.1
45d	18	27	5.1	1.5	0.6
	19	26	4.0	1.2	0.5
	20	25	2.9	0.9	0.3
	21	24	1.8	0.5	0.2
	22	23	0.6	0.2	0.1
50d	21	29	5.7	1.7	0.7
	22	28	4.3	1.3	0.5
	23	27	2.9	0.9	0.3
	24	26	1.5	0.5	0.2
55d	25	30	4.4	1.3	0.5
	26	29	2.7	0.8	0.3
	27	28	0.9	0.3	0.1
60d	27	33	6.2	1.9	0.8
	28	32	4.2	1.3	0.5
	29	31	2.1	0.6	0.3

Auch hier erscheinen nennenswerte Schwierigkeiten erst bei 40 oder 45 Tagen Gesamtintervall.

Man kann übrigens im voraus nicht wissen, ob die in dieser Zusammenstellung enthaltenen Größen denen in der vorhergehenden entgegenwirken oder ob sie sich ihnen hinzufügen. Das hängt von den geometrischen Verhältnissen des Problems ab.

Der hier vorausgesetzte Mittelwert $e \sin v_2 = 0.1$ ist insofern jedenfalls nicht zu klein, weil die kleinen Planeten meistens in der Nähe des Perihels entdeckt werden, und dann liegt die zweite Beobachtung in der Nähe derselben.

Auch wenn $\sin\chi < \frac{1}{4}$, was meistens der Fall ist, gestaltet sich die vorstehende Zusammenstellung günstiger.

Der noch nicht betrachtete Term in N:

$$N = \frac{\vartheta_1 \vartheta_3 (\vartheta_3 - \vartheta_1)^2}{96 r_2^6}$$

ist völlig einflußlos. Er ergibt:

$$(\Delta\psi'') = \frac{k^4 \tau_1 \tau_3 (\tau_3 - \tau_1)^2}{384 (r_2 - 1) r_2^5 \sin 1''}. \tag{40}$$

Setzen wir in dieser Formel:

$$r = 2, \qquad \tau_1 = 18^d, \qquad \tau_3 = 42^d, \qquad \tau = 60^d$$

(ein Fall, auf den nach der vorigen Zusammenstellung unsere Methode in einer Hypothese überhaupt nicht mehr anwendbar ist), so folgt:

$$\Delta\psi'' = 0''\!.6.$$

Dieses Glied ist also für unsere Diskussion völlig bedeutungslos.

Das Gelingen einer Bahnbestimmung in einer Näherung mit unserer Methode hängt nach dem Vorhergehenden eigentlich am wenigsten von Bahnexzentrizität ab. Wichtiger ist die Gleichheit der Zwischenzeiten und vor allem der Radius-Vektor.

§ 7. Ableitung der Gleichung zur Bestimmung des Winkels χ am Planeten.

Nachdem wir uns nun ein Urteil über die Leistungsfähigkeit unserer Methode gebildet haben, gehen wir dazu über, für die Aufstellung der Gleichung zur Bestimmung des Winkels χ am Planeten (zur Zeit der zweiten Beobachtung) möglichst einfache Rechnungsvorschriften abzuleiten.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\left.\begin{array}{lll} \tau = t_3 - t_1, & \tau_1 = t_3 - t_2, & \tau_3 = t_2 - t_1 \\ \vartheta = k\tau, & \vartheta_1 = k\tau_1, & \vartheta_3 = k\tau_3, \\ \nu_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta} = \frac{\tau_1}{\tau}, & & \nu_3 = \frac{\vartheta_3}{\vartheta} = \frac{\tau_3}{\tau}, \\ \Pi = \frac{5}{48} k^2 \tau^2, & Q_1 = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \nu_1^2, & Q_3 = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \nu_3^2. \end{array}\right\} \tag{41}$$

Dann läßt sich (26) wie folgt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} z_1 \nu_1 \left\{1 + \frac{\Pi Q_1}{r_2^3}\right\} + z_3 \nu_3 \left\{1 + \frac{\Pi Q_3}{r_2^3}\right\} \\ = z_2 \left\{1 - \frac{\Pi}{r_2^3}\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Wendet man diese Gleichung auf diejenige Koordinatenrichtung an, welche auf dem durch erste und dritte Beobachtung hindurchgehenden größten Kreise senkrecht steht, so ergibt sich mittels der Formeln (9) p. 5 [—]:

$$\left.\begin{aligned} -\mathfrak{Z}_1 \nu_1 \left\{1 + \frac{\Pi Q_1}{r_2^3}\right\} - \mathfrak{Z}_3 \nu_3 \left\{1 + \frac{\Pi Q_3}{r_2^3}\right\} \\ = (\rho_2 \sin h_2 - \mathfrak{Z}_2) \left\{1 - \frac{\Pi}{r_2^3}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{42a}$$

Führen wir nun mittels der Gleichungen (12) p. 5 [—.] den Winkel χ am Planeten ein und setzen außerdem zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} E &= \mathfrak{Z}_2 - R_2 \sin h_2 \cos \psi \\ F &= (\mathfrak{Z}_1 \nu_1) + (\mathfrak{Z}_3 \nu_3) \\ G &= (\mathfrak{Z}_1 \nu_1) Q_1 + (\mathfrak{Z}_3 \nu_3) Q_3, \end{aligned} \tag{43}$$

so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} (E - F) \sin \chi - R_2 \sin h_2 \sin \psi \cos \chi \\ = \frac{\Pi (E + G)}{R_2^3 \sin^3 \psi} \sin^4 \chi - \frac{\Pi R_2 \sin h_2 \sin \psi}{R_2^3 \sin^3 \psi} \sin^3 \chi \cos \chi. \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Setzt man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} a'' \cos A'' &= E + G & c'' \cos C'' &= E - F \\ a'' \sin A'' &= R_2 \sin h_2 \sin \psi & c'' \sin C'' &= R_2 \sin h_2 \sin \psi \\ h'' &= \frac{a''}{c''} \frac{\Pi}{(R_2 \sin \psi)^3}, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

so folgt:

$$\sin (\chi - C'') = h'' \sin^3 \chi \sin (\chi - A'').$$

Ein Vergleich mit p. 6 [—.] zeigt, daß die Mehrarbeit gegenüber der dort auseinandergesetzten Methode bei bedeutend erhöhter Genauigkeit eine ganz unbeträchtliche ist. Ähnliches gilt auch von der Auflösung der linearen Gleichungen zur Bestimmung der äußeren Vektoren.

Da χ immer nahezu C'' ist, so setzt man mit Vorteil:

$$\chi = C'' + \vartheta'' \qquad B'' = C'' - A'' \tag{47a}$$

und hat dann ϑ'' aus folgender Gleichung zu bestimmen:

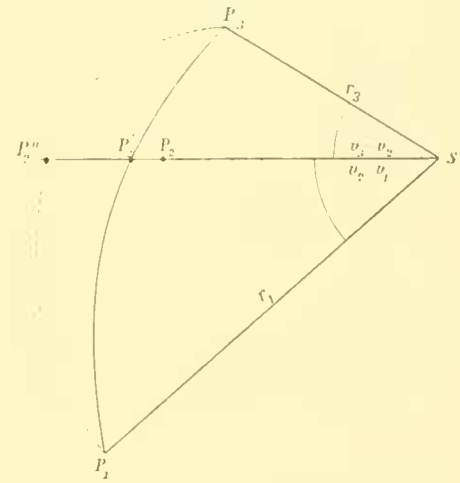
$$\sin \vartheta'' = h'' \sin^3 (C'' + \vartheta'') \sin (B'' + \vartheta''). \tag{47}$$

§ 8. Die Bestimmung des Parameters.

Mit der Bestimmung des Winkels χ am Planeten zur Zeit der zweiten Beobachtung ist der transzendente Teil der Aufgabe erschöpft. Man findet hieraus nach (12), p. 5 [—], ρ_2 und den zweiten heliozentrischen Ort.

Hieraus ergeben sich dann unter Anwendung der Grundgleichung (26) auf alle Koordinatenrichtungen bei Heranziehung der übrigen Beobachtungsdaten die äußeren heliozentrischen Orte durch lineare Gleichungen. Wie diese in einfacher Weise aufzulösen sind, werden wir später sehen. Wir betrachten also vorläufig die äußeren heliozentrischen Orte als gegeben und suchen aus demselben und der Zwischenzeit den Parameter zu bestimmen.

Fig. 3.



Die im § 6 erhaltenen Resultate bleiben im wesentlichen auch dann noch bestehen, wenn die beiden äußeren Orte nicht vollständig strenge dargestellt sind, wenn nur ihre Darstellung erheblich genauer ist, als der nach der Theorie zu erwartende Fehler des mittleren Ortes.

Um also bei Bestimmung des Parameters keine unnütze Genauigkeit anzustreben, müssen wir untersuchen, in welcher Weise ein bei Bestimmung des Parameters begangener Fehler auf die drei Orte einwirkt.

Seien also P_1, P_2 und P_3 die drei Stellungen des Planeten in seiner Bahnebene, wie sie am Schlusse der Bahnbestimmung erhalten werden.

Berechnet man dann aus den beiden äußeren Orten P_1 und P_3 und der Zwischenzeit die Bahnelemente strenge, wie das gewöhnlich geschieht, würde man eine andere Bahn $P_1 P_2' P_3$ erhalten, welche im allgemeinen nicht durch P_2 hindurchgeht.

P_2' soll in derselben auf der Linie SP_2 liegen.

$P_2 P_2'$ ist dann die in § 5, Formel (31 *a*) abgeleitete Größe Δr.

Übrigens würde P_2' in der so erhaltenen Kepler'schen Bewegung nicht genau der Zeit t_2 entsprechen.

Hätte man hingegen p aus den beiden äußeren Orten und der Zwischenzeit nur näherungsweise berechnet (wie wir das in der Folge tun wollen), so würde man noch einen anderen Bahnbogen $P_1 P_2'' P_3$ erhalten, welcher nicht genau in der Zeit $t_3 - t_1$ durchlaufen wird.

P_2'' soll wieder auf der Geraden SP_2 liegen.

Wir wollen nun untersuchen, welcher Wert von $P_2' P_2''$ einem Fehler δp von p entspricht.

Zwischen dem Parameter, den drei Radii-Vektoren und ihren Zwischenwinkeln besteht in jeder elliptischen Bewegung die leicht abzuleitende Relation:

$$\left.\begin{aligned} 0 = \left(\frac{p}{r_1} - 1\right) \sin(v_3 - v_2) + \left(\frac{p}{r_2} - 1\right) \sin(v_1 - v_3) \\ + \left(\frac{p}{r_3} - 1\right) \sin(v_2 - v_1) \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

oder:

$$p = \frac{\sin(v_3 - v_2) + \sin(v_1 - v_3) + \sin(v_2 - v_1)}{\dfrac{\sin(v_3 - v_2)}{r_1} + \dfrac{\sin(v_1 - v_3)}{r_2} + \dfrac{\sin(v_2 - v_1)}{r_3}}. \tag{48a}$$

woraus sich durch Differenzierung ergibt:

$$\left.\begin{aligned}\delta r_2 &= \frac{r_2^2}{p^2}\,\delta p\,\frac{\sin(v_3-v_2)+\sin(v_1-v_3)+\sin(v_2-v_1)}{\sin(v_1-v_3)}\\ &= -\frac{r_2^2}{p^2}\,\delta p\,\frac{2\sin\frac{v_2-v_1}{2}\cdot\sin\frac{v_3-v_2}{2}}{\cos\frac{v_3-v_1}{2}}.\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Hieraus geht hervor, daß ein Fehler in p, nur mit der zweiten Potenz der Zwischenzeiten oder Zwischenwinkel multipliziert, in r_2 eingeht.

Wenn wir in dieser Formel die ersten Potenzen der Exzentrizität und die zweiten Potenzen der Zwischenzeiten vernachlässigen, so ergibt sich näherungsweise:

$$\delta r_2 \doteq -\frac{\delta p}{2}\cdot\frac{\vartheta_1\vartheta_3}{r_2^6}. \quad (49a)$$

Wir können jetzt auch den Einfluß eines Fehlers in p auf die Winkel leicht feststellen.

Zu der Bewegung: $P_1P_2'P_3$ braucht der Planet die Zeit t_3-t_1.

Einem etwas fehlerhaften Werte von p entspricht der Bogen $P_1P_2''P_3$, der in einer etwas anderen Zeit durchlaufen wird. Wir wollen die Differenz beider Zeiten ermitteln.

Es ist für jede dieser Bewegungen die doppelte Dreiecksfläche $n = P_1P_3S$ gemeinsam.

Nach einer bekannten Formel[1] ist nun für jede Kepler'sche Bewegung die doppelte Dreiecksfläche:

$$r_1r_3\sin(v_3-v_1) = \vartheta\sqrt{p}\left[1-\frac{\vartheta^2}{6r^3}+\frac{\vartheta^4}{120r^6}+\frac{\vartheta^4}{80}\Psi\ldots\right], \quad (50)$$

wo Ψ dieselbe Bedeutung hat wie in (2') und r der Radius-Vektor, der dem Mittel der Zeiten der beiden äußeren Orte entspricht, ϑ schließlich die Zwischenzeit, in Laplace'schen Zeiteinheiten gemessen.

Differenziert man (50) logarithmisch, so ergibt sich:

$$-\frac{\delta\vartheta}{\vartheta} = \frac{\delta p}{2p}+\frac{\delta K}{K}, \quad (50a)$$

wo K die Klammer.

Nun ist näherungsweise:

$$\delta K = -\frac{\vartheta\,\delta\vartheta}{3r^3}+\frac{\vartheta^2\,\delta r}{2r^4} \quad (51)$$

oder, indem man in der Näherungsformel (49*a*) $\vartheta_1 = \vartheta_3 = \frac{\vartheta}{2}$ setzt:

$$\delta K = -\frac{\vartheta\,\delta\vartheta}{3r^3}-\frac{\vartheta^4\,\delta p}{16r^{10}}. \quad (51a)$$

Durch Substitution dieses Wertes in (50*a*) ergibt sich schließlich:

$$\frac{\delta\vartheta}{\vartheta}\left(1-\frac{\vartheta^2}{3Kr^3}\right) = \frac{\delta p}{2p}\left(1-\frac{\vartheta^4 p}{8Kr^{10}}\right), \quad (52)$$

wo K seiner Definition nach in erster Näherung gleich Eins ist. Man schließt hieraus mit genügender Annäherung:

$$\delta\vartheta \doteq -\frac{\delta p}{2p}\,\vartheta. \quad (53)$$

[1] Siehe Prof. E. Weiß. Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschr. der kais. Akad. der Wissensch., mathem.-naturw. Kl., LX. Bd, p. 352, die zweite der Formeln (10).

Dieser Zeitdifferenz zwischen den beiden Bewegungen entspricht nun nahezu folgende Winkelbewegung:

$$\delta(v_3 - v_1) = -\frac{\delta p \, . \, \vartheta}{2 r_2^{\frac{5}{2}}}. \tag{54}$$

Kurz gesagt: ein Fehler in p multipliziert sich in den Radius-Vektoren mit der zweiten Potenz der Zwischenzeiten, in den Winkeln mit der ersten Potenz derselben.

(50) kann zunächst wie folgt geschrieben werden:

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}{\vartheta \left[1 - \frac{\vartheta^2}{6 r^3} + \frac{\vartheta^4}{120 r^6} \right]} \left(1 - \frac{\vartheta^4}{80} \psi \right). \tag{55}$$

Da $v_3 - v_1$ und ϑ von der Ordnung der Zwischenzeiten sind, so vernachlässigt man in p ein Glied von der Form ct^4, wenn man diesen letzten Faktor wegläßt und diese Vernachlässigung gibt nach dem soeben Gesagten in den Winkeln und Radius-Vektoren Geringeres, als wir bei unserer Methode schon ohnehin vernachlässigt haben. Das übrige kann mit Vorteil geschrieben werden:

$$\sqrt{p} = \frac{r_1 r_3 \sin(v_3 - v_1)}{r^{\frac{3}{2}} \sin W}, \tag{56}$$

wo:

$$W = \frac{\vartheta}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

Hierbei ist also r der Radius-Vektor für das Mittel der beiden äußeren Zeiten. Wir müssen für diese Größe nun eine geeignete Näherung einführen.

Man hat allgemein:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r - \frac{\vartheta r'}{2} + \frac{\vartheta^2 r''}{8} - \frac{\vartheta^3 r'''}{48} \dots \\ r_3 &= r + \frac{\vartheta r'}{2} + \frac{\vartheta^2 r''}{8} + \frac{\vartheta^3 r'''}{48} \dots \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

wo $r', r'' \dots$ die sukzessiven Ableitungen von r nach der Zeit. Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich:

$$r_1 r_3 = r^2 \left[1 + \frac{\vartheta^2}{4} \left(\frac{r''}{r} - \frac{r'^2}{r^2} \right) \dots \right], \tag{58}$$

wobei sich in der Klammer die dritte Potenz von ϑ vollständig weghebt.

Setzt man also:

$$r = \sqrt{r_1 r_3}, \tag{58a}$$

so vernachlässigt man in r ein Glied von der Form: ct^2. Hieraus resultiert im Nenner von (55) ein Glied von der Form ct^4 und ebenso in $\sqrt{p}$ und p selbst.

Hieraus ergibt sich also in den Winkeln ein Glied von der Form ct^5, in den Radien ct^6, also Vernachlässigungen, die kleiner sind als die schon begangenen, und man kann somit p einfach wie folgt berechnen:

$$\left. \begin{aligned} W &= \frac{\vartheta''}{(r_1 r_3)^{\frac{3}{4}}}, \qquad \vartheta'' = k''(t_3 - t_1) \\ \sqrt{p} &= (r_1 r_3)^{\frac{1}{4}} \frac{\sin(v_3 - v_1)}{\sin W}. \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

Die drei am Ende dieser Arbeit gegebenen Beispiele bestätigen dieses Resultat.

Wenn man die bei der von mir gewählten Anordnung am Schlusse der Rechnung erhaltenen mittleren Anomalien mit der vorher erhaltenen mittleren Bewegung auf eine und dieselbe Epoche reduziert, so fällt M_2 stets außerhalb des Raumes zwischen M_1 und M_3. Bei Vanadis wiederholt sich diese Erscheinung auch in der zweiten Hypothese. Wäre die Formel (59) für p ganz strenge, so müßten M_1 und M_3, auf dieselbe Epoche reduziert, zusammenfallen.

Der Umstand, daß M_2 bei allen Beispielen außerhalb des zwischen M_1 und M_3 eingeschlossenen Raumes fällt, beweist, daß auch rechnerisch die in (59) begangenen Vernachlässigungen von geringerem Einfluß auf das Resultat der Bahnbestimmung sind als die übrigen in unserer Methode enthaltenen.

9. Ableitung der zur Rechnung erforderlichen Hilfsformeln.

Zur rechnerischen Anwendung ist jetzt vor allem noch zweierlei erforderlich: die Aufstellung geeigneter sphärischer Formeln für die geometrischen Hilfsgrößen und ein möglichst einfaches Verfahren zur Bestimmung der äußeren heliozentrischen Orte aus dem mittleren.

Wir behandeln diese Aufgaben gleichzeitig für Äquator und Ekliptik als Fundamentalebenen, um nicht wesentlich dasselbe zweimal vorbringen zu müssen. Wir bezeichnen wie bisher jede Größe mit dem Index 1, 2 oder 3, je nachdem sie der ersten, zweiten oder dritten Beobachtung entspricht.

Für den Äquator seien X, Y und Z die rechtwinkeligen Koordinaten der Sonne. Für die Ekliptik seien $\odot$ die Sonnenlängen, $L = \odot + 180$ die Erdlängen, R die Abstände Sonne—Erde. Ferner seien ρ die Abstände Planet—Erde und r die heliozentrischen Radii-Vektoren des Planeten. Mit α und δ bezeichnen wir die Rektaszension und Deklination des Planeten, mit λ und β seine Länge und Breite.

In unserer Methode werden nur sieben geometrische Hülfsgrößen gebraucht: Zunächst muß der durch erste und dritte Beobachtung hindurchgehende größte Kreis definiert werden. Dies erfordert zwei Hülfsgrößen: I die Neigung und K den Knoten desselben (siehe Fig. 4). Diese Größen werden bekanntlich für die Ekliptik durch folgende Formeln definiert:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} I \sin(\lambda_1 - K) = \operatorname{tg}\beta_1 \\ &\operatorname{tg} I \cos(\lambda_1 - K) = \frac{\operatorname{tg}\beta_1 \cos(\lambda_1-\lambda_3) - \operatorname{tg}\beta_3}{\sin(\lambda_1-\lambda_3)} \\ &\text{Kontrolle:}\quad \operatorname{tg}\beta_3 = \operatorname{tg} I \sin(\lambda_3 - K). \end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Für den Äquator haben α und δ statt λ und β einzutreten.

Hierdurch sind auch die Richtungscosinus der Normalen senkrecht zu diesem Kreise bestimmt. Wir beziehen dieselben auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, deren $+x$-Achse nach dem Frühlingspunkt zeigt und dessen $+y$-Achse senkrecht hierzu in der betreffenden Fundamentalebene liegt, und zwar nach der Seite der wachsenden Rektaszensionen oder Längen.

Die z rechnen wir positiv nach Norden. Die nördliche Normale zu dem soeben definierten größten Kreise bildet mit der $+z$-Richtung offenbar den Winkel I, da I andererseits die Neigung dieses größten Kreises gegen die Fundamentalebene xy (Äquator oder Ekliptik) ist. Demnach ist der Richtungscosinus $\mathfrak{z}$ zwischen der nördlichen Normalen N und der $+z$-Achse:

$$\cos(zN) = \mathfrak{z} = \cos I.$$

Ferner ist die Projektion der Normalen auf die xy-Ebene (Äquator oder Ekliptik) gleich $\sin I$ (ihre Länge gleich Eins vorausgesetzt).

Die Projektion des Endes der Normalen auf die xy-Ebene N' steht aber vom Mittelpunkte O der Himmelskugel um $\sin I$ ab. Fällt K in den ersten Quadranten, so liegt N' im vierten (vergleiche die

Figuren 4 und 5), und zwar so, daß die Linie ON' mit der $+x$-Achse den Winkel $90-K$ bildet. Demnach sind die Projektionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ von $+N$ auf die $+x$- und $+y$-Achse oder ihre Richtungscosinus gegen diese Achsen:

$$\left.\begin{aligned}\cos(Nx) &= \mathfrak{x} = +\sin I\cos(90-K) = +\sin I\sin K\\ \cos(Ny) &= \mathfrak{y} = -\sin I\sin(90-K) = -\sin I\cos K\\ \cos(Nz) &= \mathfrak{z} = \qquad\qquad\qquad\qquad +\cos I.\end{aligned}\right\}\qquad(61)$$

Fig. 4.

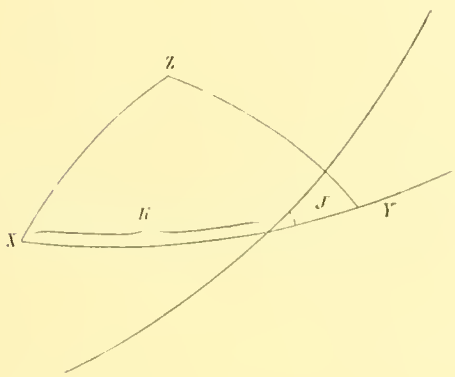
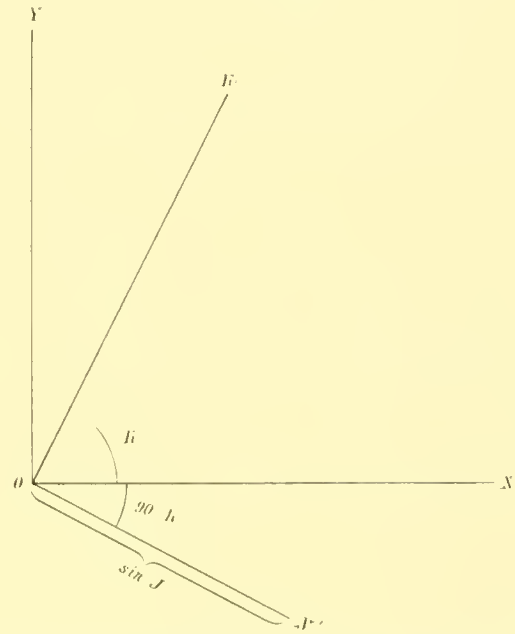


Fig. 5.



Da diese Normale ihrer Definition nach auf den Richtungen nach dem ersten und dritten Ort senkrecht stehen muß, so hat man:

$$\cos(1, N) = 0, \qquad\qquad \cos(3, N) = 0$$

oder

$$\mathfrak{x}\cos\alpha_1\cos\delta_1 + \mathfrak{y}\sin\alpha_1\cos\delta_1 + \mathfrak{z}\sin\delta_1 = 0$$

und ähnlich für den dritten Ort.

Dividiert man durch $\cos\delta_1$, so erhält man schließlich folgende wichtige Kontrollgleichungen:

Für den Äquator:

$$\left.\begin{aligned}0 &= \mathfrak{x}\cos\alpha_1 + \mathfrak{y}\sin\alpha_1 + \mathfrak{z}\,\mathrm{tg}\,\delta_1\\ 0 &= \mathfrak{x}\cos\alpha_3 + \mathfrak{y}\sin\alpha_3 + \mathfrak{z}\,\mathrm{tg}\,\delta_3\end{aligned}\right\}\qquad(62)$$

und ähnlich für die Ekliptik:

$$\left.\begin{aligned}0 &= \mathfrak{x}\cos\lambda_1 + \mathfrak{y}\sin\lambda_1 + \mathfrak{z}\,\mathrm{tg}\,\beta_1\\ 0 &= \mathfrak{x}\cos\lambda_3 + \mathfrak{y}\sin\lambda_3 + \mathfrak{z}\,\mathrm{tg}\,\beta_3.\end{aligned}\right\}\qquad(62')$$

Hierdurch können die Größen $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$, $\mathrm{tg}\,\delta_1$ und $\cos\alpha_3$, $\sin\alpha_3$, $\mathrm{tg}\,\delta_3$, welche dann später nach Bestimmung der geozentrischen, curtierten Distanzen zum Übergang auf die heliozentrischen Koordinaten dienen, gleich von vornherein mitkontrolliert werden.

Aus den Größen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ergeben sich die nördlichen Abstände der Sonne von obigem größten Kreise (in Erdbahnradien):

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{Z}_1 &= X_1\mathfrak{x} + Y_1\mathfrak{y} + Z_1\mathfrak{z}\\ \mathfrak{Z}_2 &= X_2\mathfrak{x} + Y_2\mathfrak{y} + Z_2\mathfrak{z}\\ \mathfrak{Z}_3 &= X_3\mathfrak{x} + Y_3\mathfrak{y} + Z_3\mathfrak{z}.\end{aligned}\right\}\qquad(63)$$

Für den Äquator kann man die Summe dieser drei Gleichungen als Kontrolle verwenden:

$$\Sigma \mathfrak{Z} = \mathfrak{x} \Sigma X + \mathfrak{y} \Sigma Y + \mathfrak{z} \Sigma Z. \tag{63'}$$

Für die Ekliptik lassen sich die Formeln (63) wesentlich einfacher gestalten.

Man hat für diese Fundamentalebene:

$$\left.\begin{aligned} X &= R \cos \odot = -R \cos L \\ Y &= R \sin \odot = -R \sin L \\ Z &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Setzt man diese Größen in (63) ein, so ergibt sich mit Rücksicht auf (61):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= R_1 \sin I \sin (L_1 - K) \\ \mathfrak{Z}_2 &= R_2 \sin I \sin (L_2 - K) \\ \mathfrak{Z}_3 &= R_3 \sin I \sin (L_3 - K). \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Diese Ausdrücke sind so einfach, daß eine Kontrolle nach Art von (63') eher ein Umweg wäre.

Der Sinus des nördlichen sphärischen Abstandes h_2 des Planeten in der zweiten Beobachtung von obigem größten Kreise ist offenbar inklusive Vorzeichen gleich dem Kosinus des Winkels zwischen der zweiten Beobachtung und der Normalen $+X$; also nach Division mit $\cos \delta_2$:

$$\frac{\sin h_2}{\cos \delta_2} = \mathfrak{x} \cos \alpha_2 + \mathfrak{y} \sin \alpha_2 + \mathfrak{z} \operatorname{tg} \delta_2. \tag{66}$$

Diese Formel gestattet auch, $\sin h_2$ in symmetrischer Weise mit den Kontrollen (62) gleichzeitig zu rechnen.

Setzt man anderseits in (66) für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ ihre Werte (61) ein, so folgt:

$$\sin h_2 = \sin I \cos \delta_2 \sin (K - \alpha_2) + \cos I \sin \delta_2. \tag{67}$$

Durch gleichzeitige Anwendung der Formeln (67) und (66) werden die Größen $\cos \alpha_2$, $\sin \alpha_2$ und $\operatorname{tg} \delta_2$ kontrolliert.

Für die Ekliptik als Fundamentalebene ergibt sich entsprechend (67):

$$\sin h_2 = \sin \beta_2 \cos I - \cos \beta_2 \sin I \sin (\lambda_2 - K). \tag{68}$$

Es erübrigt nun noch, den Winkel ψ Sonne—Planet zur Zeit der zweiten Beobachtung zu bestimmen.

Für die Ekliptik kann das, wie bekannt,[1] durch folgende Formeln geschehen:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varkappa &= \frac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin (\lambda_2 - L_2)} && 0 < \varkappa < 90° \\ \operatorname{tg} \psi &= \frac{\operatorname{tg} (\lambda_2 - L_2)}{\cos \varkappa} && 90° < \psi < 180° \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

Kontrolle: $\cos \psi = \cos \beta_2 \cos (\lambda_3 - L_2)$.

Für den Äquator hingegen ist hierzu die Kenntnis der Rektaszension A_2 und der Deklination D_2 der Sonne erforderlich.

---

[1] Tietjen, Berl. Jahrbuch 1879, Anhang, p. 8.

Da anderseits auch R_2 gebraucht wird, so berechnet man am besten diese drei Größen aus den rechtwinkeligen Sonnenkoordinaten X_2, Y_2 und Z_2 mittels der Formeln:

$$\left.\begin{aligned} R_2 \cos D_2 \cos A_2 &= X_2 \\ R_2 \cos D_2 \sin A_2 &= Y_2 \\ R_2 \sin D_2 \qquad\qquad &= Z_2, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

welche Operation nur für den zweiten Ort auszuführen ist.

Man hat dann:

$$\cos\psi = \frac{X_2}{R_2}\cos\alpha_2\cos\delta_2 + \frac{Y_2}{R_2}\sin\alpha_2\cos\delta_2 + \frac{Z_2}{R_2}\sin\delta_2 \tag{71}$$

oder:

$$\frac{\cos\psi}{\cos\delta_2} = \frac{X_2}{R_2}\cos\alpha_2 + \frac{Y_2}{R_2}\sin\alpha_2 + \frac{Z_2}{R_2}\operatorname{tg}\delta_2, \tag{71'}$$

wobei also wieder $\cos\alpha_2$, $\sin\alpha_2$ und $\operatorname{tg}\delta_2$ mitverwendet werden.

Die Bestimmung von ψ aus $\cos\psi$ könnte bedenklich erscheinen, wenn ψ nahe gleich 180° (wenn die zweite Beobachtung in die Nähe der Opposition fällt). Dann wird ψ am sichersten aus $\cos^2\frac{\psi}{2}$ bestimmt.

Man findet aus (70) und (71):

$$\cos\psi = \cos\delta_2\cos D_2\cos(\alpha_2 - A_2) + \sin\delta_2\sin D_2 \tag{72}$$

oder:

$$\cos^2\frac{\psi}{2} = \sin^2\frac{\delta_2 + D_2}{2} + \cos\delta_2\cos D_2\cos^2\frac{\alpha_2 - A_2}{2}. \tag{73}$$

Diese Formel erlaubt unter allen Umständen eine sehr strenge Berechnung von ψ.

(71') kann als Kontrolle verwendet werden.

Die sieben Größen K, I, $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$, $\sin h_2$ und ψ sind die einzigen, in dieser Methode erforderlichen, geometrischen Hülfsgrößen.

Man erhält sie für die Ekliptik als Fundamentalebene etwas schneller, doch bleiben hier $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, $\mathfrak{Z}_3$ und $\sin h_2$ unkontrolliert.

Hat man den Äquator als Fundamentalebene gewählt, so ist die Rechnung vielleicht etwas länger, hingegen sind dann alle diese Größen unter sich und mit den wichtigen $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ und $\operatorname{tg}\delta$ durch Kontrollen verbunden.

Die äußeren heliozentrischen Orte ergeben sich, indem wir die Gleichung (26) in der Form (42) auf alle Koordinatenrichtungen ausdehnen.

Wir nehmen also an, daß in jeder beliebigen Koordinatenrichtung:

$$x_1 T_1 + x_3 T_3 = x_2, \tag{74a}$$

wo nach (42), p. 16 [—]:

$$T_1 = \frac{\nu_1\left\{1 + \frac{\Pi Q_1}{r_2^3}\right\}}{1 - \frac{\Pi}{r_2^3}}, \qquad T_3 = \frac{\nu_3\left\{1 + \frac{\Pi Q_3}{r_2^3}\right\}}{1 - \frac{\Pi}{r_2^3}}. \tag{74}$$

Ist der Winkel χ am Planeten bestimmt, so sind T_1 und T_3 (die Dreiecksflächenverhältnisse) vollständig bekannte Größen. Auch der zweite heliozentrische Ort ist dann bekannt.

Durch Anwendung von (74 *a*) auf die Richtung senkrecht zum größten Kreise durch erste und dritte Beobachtung ergibt sich folgende Kontrollgleichung für die T:

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}_1 T_1 + \mathfrak{Z}_3 T_3 + \rho_2 \sin h_2, \tag{74b}$$

wobei ρ_2 die wirkliche terrestrische Distanz zur Zeit der zweiten Beobachtung.

Die curtierten Distanzen bezeichnen wir mit $[\rho]$, so daß also je nach der Fundamentalebene:

$$[\rho] = \rho \cos \beta \text{ oder } [\rho] = \rho \cos \delta. \tag{75}$$

Wir wollen nun zunächst mittels (74 *a*) die auf den Äquator curtierten terrestrischen Abstände $[\rho_1]$ und $[\rho_3]$ zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung bestimmen.

Wir haben für die heliozentrischen Äquatorialkoordinaten:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= [\rho_1] \cos \alpha_1 - X_1 \\ y_1 &= [\rho_1] \sin \alpha_1 - Y_1 \\ x_3 &= [\rho_3] \cos \alpha_3 - X_3 \\ y_3 &= [\rho_3] \sin \alpha_3 - Y_3. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Durch Anwendung der Gleichung (74 *a*) auf die x- und y-Richtung ergibt sich demnach:

$$\left.\begin{aligned} [\rho_1] T_1 \cos \alpha_1 + [\rho_3] T_3 \cos \alpha_3 &= x_2 + X_1 T_1 + X_3 T_3 = m \cos M \\ [\rho_1] T_1 \sin \alpha_1 + [\rho_3] T_3 \sin \alpha_3 &= y_2 + Y_1 T_1 + Y_3 T_3 = m \sin M, \end{aligned}\right\} \tag{77a}$$

wobei also m und M völlig bekannt sind.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt dann:

$$\left.\begin{aligned} [\rho_1] T_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_3) &= m \sin (M - \alpha_3) \\ [\rho_3] T_3 \sin (\alpha_1 - \alpha_3) &= m \sin (\alpha_1 - M), \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

woraus sich $[\rho_1]$ und $[\rho_3]$ ergeben.

Die Bestimmung dieser Größen ist rechnerisch eine um so schärfere, je größer $\alpha_1 - \alpha_3$. Die günstigste Bestimmung würde also dann stattfinden, wenn man den größten Kreis durch die erste und dritte Beobachtung an Stelle des Äquators verwendet hätte. Doch wiegt der hieraus entstehende Vorteil die hiermit verbundene Komplikation keineswegs auf.

Aus $[\rho_1]$ und $[\rho_3]$ erhält man sodann die rechtwinkeligen heliozentrischen Äquatorialkoordinaten der äußeren Orte: x_1, y_1, z_1 und x_3, y_3 und z_3.

Man kann von diesen Werten aus in bequemster Weise auf die Ekliptik als Fundamentalebene übergehen. Bezeichnen wir die rechtwinkeligen Ekliptikalkoordinaten mit x^e, y^e und z_e, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{aligned} x^e &= x \\ y^e &= \quad y \cos \varepsilon + z \sin \varepsilon = s \cos (\sigma - \varepsilon) \\ z^e &= -y \sin \varepsilon + z \cos \varepsilon = s \sin (\sigma - \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{78}$$[1]

wobei:

$$y = s \cos \sigma$$

$$z = s \sin \sigma$$

und ε die Schiefe der Ekliptik.

---

[1] In Oppolzer's Lehrbuch der Bahnbestimmung, I. Bd., 2. Aufl., p. 12, stehen die Formeln (78) mit dem Texte im Widerspruche.

Sowohl x, y, z als auch x^e, y^e und z^e müssen den Gleichungen (74*a*) genügen.

Hierauf ergeben sich die heliozentrischen Längen und Breiten aus den Formeln:

$$\left.\begin{aligned} x_e &= r \cos b \cos l \\ y_e &= r \cos b \sin l \\ z_e &= r \sin b. \end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

Ist die Ekliptik von vornherein Fundamentalebene, so hat man in den Gleichungen (74*a*) zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} x &= [r] \cos l = [\rho] \cos \lambda + R \cos L \\ y &= [r] \sin l = [\rho] \sin \lambda + R \sin L \\ z &= [r] \operatorname{tg} b = [\rho] \operatorname{tg} \beta, \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

wobei $[r]$ der curtierte heliozentrische Radius-Vektor ($r \cos b$) ist. Für den zweiten Ort sind die heliozentrischen Polarkoordinaten bekannt.

Die Gleichungen (74*a*) lassen sich dann schreiben:

$$\left.\begin{aligned} [\rho_1] T_1 \cos \lambda_1 + [\rho_3] T_3 \cos \lambda_3 &= [r_2] \cos l_2 - R_1 T_1 \cos L_1 - R_3 T_3 \cos L_3 \\ [\rho_1] T_1 \sin \lambda_1 + [\rho_3] T_3 \sin \lambda_3 &= [r_2] \sin l_2 - R_1 T_1 \sin L_1 - R_3 T_3 \sin L_3. \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$\left.\begin{aligned} [\rho_1] T_1 \sin (\lambda_1 - \lambda_3) &= [r_2] \sin (l_2 - \lambda_3) + R_1 T_1 \sin (\lambda_3 - L_1) + R_3 T_3 \sin (\lambda_3 - L_3) \\ [\rho_3] T_3 \sin (\lambda_1 - \lambda_3) &= [r_2] \sin (\lambda_1 - l_2) + R_1 T_1 \sin (L_1 - \lambda_1) + R_3 T_3 \sin (L_3 - \lambda_1) \end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen:

$$\left.\begin{aligned} G_1 &= T_1 R_1 \sin (\lambda_3 - L_1) + T_3 R_3 \sin (\lambda_3 - L_3) + [r_2] \sin (l_2 - \lambda_3) \\ G_3 &= T_1 R_1 \sin (L_1 - \lambda_1) + T_3 R_3 \sin (L_3 - \lambda_1) + [r_2] \sin (\lambda_1 - l_2) \\ [\rho_1] &= \frac{G_1}{T_1 \sin (\lambda_1 - \lambda_3)}, \qquad [\rho_3] = \frac{G_3}{T_3 \sin (\lambda_1 - \lambda_3)}. \end{aligned}\right\} \qquad (83)$$

Auch hier muß wieder für jede Koordinatenrichtung die Gleichung (74*a*) bestehen. Wendet man dieselbe auf die Richtung senkrecht zur Ekliptik an, so ergibt sich eine besonders einfache Kontrolle. In dieser Richtung sind nämlich die Sonnenkoordinaten gleich Null und die heliozentrischen Koordinaten sind infolgedessen gleich den terrestrischen:

$$[\rho_1] \operatorname{tg} \beta_1, \qquad [\rho_2] \operatorname{tg} \beta_2 \quad \text{und} \quad [\rho_3] \operatorname{tg} \beta_3.$$

Setzt man diese Werte in (74*a*) ein, so folgt:

$$T_1 [\rho_1] \operatorname{tg} \beta_1 + T_3 [\rho_3] \operatorname{tg} \beta_3 = [\rho_2] \operatorname{tg} \beta_2. \qquad (84)$$

oder mit Rücksicht auf (83) als Kontrollgleichung:

$$G_1 \operatorname{tg} \beta_1 + G_3 \operatorname{tg} \beta_3 = [\rho_2] \operatorname{tg} \beta_2 \sin (\lambda_1 - \lambda_3). \qquad (85)$$

Mittels $[\rho_1]$ und $[\rho_3]$ werden nun auch hier wieder die heliozentrischen Koordinaten der äußeren Orte in bekannter Weise erhalten.

Nach den in diesem Paragraphen gegebenen Ergänzungen zum vorhergehenden können wir nun zu rechnerischen Anwendungen unserer Methode übergehen.

§ 10. Formelzusammenstellungen für Ekliptik und Äquator als Fundamentalebenen.

Wir beginnen damit, die erhaltenen Formeln für die beiden Fundamentalebenen in übersichtlicher Weise zusammenzustellen. Wir nehmen an, daß Parallaxe (und Sonnenbreiten, wenn man dieselben überhaupt berücksichtigen will) in den Grundlagen der Rechnung angebracht sind.

Für den Äquator kann dies geschehen, indem man an X, Y und Z die folgenden Korrektionen anbringt:

$$\left.\begin{aligned} \delta X &= -\pi \sin 1'' \cos \varphi \cos \vartheta \\ \delta Y &= -\pi \sin 1'' \cos \varphi \sin \vartheta \\ \delta Z &= -\pi \sin 1'' \sin \varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (86)^1$$

wo φ die Breite, ϑ die Ortssternzeit und π die Sonnenparallaxe (nach Gill $8''80$). Uner Annahme dieses Wertes ergibt sich, um die Korrektionen sogleich in Einheiten der letzten Dezimale zu erhalten:

$\pi \sin 1''$ in Einheiten der siebenten Dezimale [2.63005]

$\pi \sin 1''$ in Einheiten der sechsten Dezimale [1.63005].

Statt φ kann man die geographische Breite verwenden, da für Planetenbahnen die Erde bei Anbringung der Parallaxe als Kugel betrachtet werden kann.

Für die eigentliche Bahnbestimmung ergeben sich auf Grund des Vorhergehenden folgende Formelzusammenstellungen:

Ekliptik.	**Äquator.**
Grundlagen:	Grundlagen:
$t_1 \quad \lambda_1 \quad \beta_1 \quad \lg R_1 \quad L_1 = 180 + \odot_1$	$t_1 \quad \alpha_1 \quad \delta_1 \quad X_1 \quad Y_1 \quad Z_1$
$t_2 \quad \lambda_2 \quad \beta_2 \quad \lg R_2 \quad L_2 = 180 + \odot_2$	$t_2 \quad \alpha_2 \quad \delta_2 \quad X_2 \quad Y_2 \quad Z_2$
$t_3 \quad \lambda_3 \quad \beta_3 \quad \lg R_3 \quad L_3 = 180 + \odot_3$	$t_3 \quad \alpha_3 \quad \delta_3 \quad X_3 \quad Y_3 \quad Z_3$
	1 *a*) $R_2 \cos D_2 \cos A_2 = X_2$ $R_2 \cos D_2 \sin A_2 = Y_2$ $R_2 \sin D_2 = Z_2$
1) $\operatorname{tg} \varkappa = \dfrac{\operatorname{tg} \beta_2}{\sin (\lambda_2 - L_2)}, \quad 0° < \varkappa < 90°$ $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{\operatorname{tg} (\lambda_2 - L_2)}{\cos \varkappa}, \quad 90° < \psi < 180°$ Probe: $\cos \psi = \cos \beta_2 \cos (\lambda_2 - L_2)$	1 *b*) $\cos^2 \dfrac{\psi}{2} = \sin^2 \dfrac{D_2 + \delta_2}{2} + \cos^2 \dfrac{\alpha_2 - A_2}{2} \cos D_2 \cos \delta_2$ Probe: $\dfrac{\cos \psi}{\cos \delta_2} = \dfrac{X_2}{R_2} \cos \alpha_2 + \dfrac{Y_2}{R_2} \sin \alpha_2 + \dfrac{Z_2}{R_2} \operatorname{tg} \delta_2.$

[1] Siehe Klinkerfues, Theoretische Astronomie, 2. Aufl., p. 286.

Ekliptik.

2)

$$\operatorname{tg} I \sin(\lambda_1 - K) = \operatorname{tg} \beta_1$$

$$\operatorname{tg} I \cos(\lambda_1 - K) = \frac{\operatorname{tg} \beta_1 \cos(\lambda_1 - \lambda_3) - \operatorname{tg} \beta_3}{\sin(\lambda_1 - \lambda_3)}$$

$$0° < I < 90°$$

Kontrolle:

$$\operatorname{tg} \beta_3 = \operatorname{tg} I \sin(\lambda_3 - K).$$

3) $$(\sin h_2) = \sin \beta_2 \cos I - \cos \beta_2 \sin I \sin(\lambda_2 - K).$$

4)

$$\mathfrak{Z}_1 = R_1 \sin I \sin(L_1 - K)$$
$$\mathfrak{Z}_2 = R_2 \sin I \sin(L_2 - K)$$
$$\mathfrak{Z}_3 = R_3 \sin I \sin(L_3 - K).$$

Äquator.

2)

$$\operatorname{tg} I \sin(\alpha_1 - K) = \operatorname{tg} \delta_1$$

$$\operatorname{tg} I \cos(\alpha_1 - K) = \frac{\operatorname{tg} \delta_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_3) - \operatorname{tg} \delta_3}{\sin(\alpha_1 - \alpha_3)}$$

$$0° < I < 90°$$

Kontrolle:

$$\operatorname{tg} \delta_3 = \operatorname{tg} I \sin(\alpha_3 - K).$$

3 *a*)

$$\mathfrak{x} = \sin K \sin I$$
$$\mathfrak{y} = -\cos K \sin I$$
$$\mathfrak{z} = \cos I$$

Proben:

$$0 = \mathfrak{x} \cos \alpha_1 + \mathfrak{y} \sin \alpha_1 + \mathfrak{z} \operatorname{tg} \delta_1$$
$$0 = \mathfrak{x} \cos \alpha_3 + \mathfrak{y} \sin \alpha_3 + \mathfrak{z} \operatorname{tg} \delta_3.$$

3 *b*)

$$\frac{(\sin h_2)}{\cos \delta_2} = \mathfrak{x} \cos \alpha_2 + \mathfrak{y} \sin \alpha_2 + \mathfrak{z} \operatorname{tg} \delta_2$$

Probe:

$$(\sin h_2) = \cos \delta_2 \sin I \sin(K - \alpha_2) + \cos I \sin \delta_2$$

4)

$$\mathfrak{Z}_1 = X_1 \mathfrak{x} + Y_1 \mathfrak{y} + Z_1 \mathfrak{z}$$
$$\mathfrak{Z}_2 = X_2 \mathfrak{x} + Y_2 \mathfrak{y} + Z_2 \mathfrak{z}$$
$$\mathfrak{Z}_3 = X_3 \mathfrak{x} + Y_3 \mathfrak{y} + Z_3 \mathfrak{z}.$$

Probe:

$$\Sigma \mathfrak{Z} = \mathfrak{x} \Sigma X + \mathfrak{y} \Sigma Y + \mathfrak{z} \Sigma Z.$$

5)[1]

$$\tau_1 = t_3 - t_2, \quad \tau_3 = t_2 - t_1, \quad \tau = t_3 - t_1 = \tau_1 + \tau_3, \quad \nu_1 = \frac{\tau_1}{\tau}, \quad \nu_3 = \frac{\tau_3}{\tau}$$

$$Q_1 = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \nu_1^2, \quad Q_3 = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} \nu_3^2.$$

Probe:

$$Q_1 + Q_3 + \frac{2}{5} = \frac{16}{5} \nu_1 \nu_3 \qquad \mathrm{II} = \frac{5}{48} k^2 \tau^2$$

$$\lg \frac{8}{5} = 0.204\,1200, \qquad \lg \frac{16}{5} = 0.505\,1500, \qquad \lg \frac{5}{48} k^2 = 5.488\,8917.$$

[1] Bei etwas ungleichen Zwischenzeiten kann eins der beiden Q negativ werden. lg Q_1 lg Q_3 und lg II müssen unbedingt richtig sein.

6)

$$E = \mathfrak{z}_2 - R_2 \sin h_2 \cos \psi$$
$$F = (\mathfrak{z}_1 \nu_1) + (\mathfrak{z}_3 \nu_3)$$
$$G = (\mathfrak{z}_1 \nu_1) Q_1 + (\mathfrak{z}_3 \nu_3) Q_3.$$
$$h'' = \frac{\Pi a''}{c''(R_2 \sin \psi)^3}.$$

$$a'' \cos A'' = E + G$$ [3]
$$a'' \sin A'' = R_2 \sin h_2 \sin \psi$$
$$c'' \cos C'' = E - F$$
$$c'' \sin C'' = R_2 \sin h_2 \sin \psi$$
$$B'' = C'' - A''.$$

---

7) Bestimmung von ϑ'' aus der Gleichung: [1]

$$\sin \vartheta'' = h'' \sin^3(\vartheta'' + C'') \sin(\vartheta'' + B'').$$

---

8)

$$\chi = C'' + \vartheta'', \qquad r_2 = \frac{R_2 \sin \psi}{\sin \chi}, \qquad \rho_2 = \frac{R_2 \sin(\chi + \psi)}{\sin \chi}, \qquad V = \frac{\Pi}{r_2^3},$$

$$\Sigma_1 = 1 + VQ_1, \qquad \Sigma_3 = 1 + VQ_3, \qquad T_1 = \frac{\nu_1 \Sigma_1}{1 - V}, \qquad T_3 = \frac{\nu_3 \Sigma_3}{1 - V}.$$

Probe:

$$\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{z}_1 T_1 + \mathfrak{z}_3 T_3 + \rho_2 \sin h_2.$$

Ekliptik.

9)

$$[\rho_2] = \rho_2 \cos \beta_2$$ [2]
$$r_2 \cos b_2 \cos(l_2 - L_2) = [\rho_2] \cos(\lambda_2 - L_2) + R_2$$
$$r_2 \cos b_2 \sin(l_2 - L_2) = [\rho_2] \sin(\lambda_2 - L_2)$$
$$r_2 \sin b_2 = [\rho_2] \operatorname{tg} \beta_2.$$

10) [4]

$$G_1 = T_1 R_1 \sin(\lambda_3 - L_1) + T_3 R_3 \sin(\lambda_3 - L_3) + [r_2] \sin(l_2 - \lambda_3)$$
$$G_3 = T_1 R_1 \sin(L_1 - \lambda_1) + T_3 R_3 \sin(L_3 - \lambda_1) + [r_2] \sin(\lambda_1 - l_2).$$

Hauptprobe:

$$G_1 \operatorname{tg} \beta_1 + G_3 \operatorname{tg} \beta_3 = [\rho_2] \operatorname{tg} \beta_2 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)$$

$$[\rho_1] = \frac{G_1}{T_1 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)}, \qquad [\rho_3] = \frac{G_3}{T_3 \sin(\lambda_1 - \lambda_3)}.$$

Äquator.

9)

$$[\rho_2] = \rho_2 \cos \delta_2$$
$$x_2 = [\rho_2] \cos \alpha_2 - X_2$$
$$y_2 = [\rho_2] \sin \alpha_2 - Y_2$$
$$z_2 = [\rho_2] \operatorname{tg} \delta_2 - Z_2.$$

10)

$$m \cos M = x_2 + X_1 T_1 + X_3 T_3$$
$$m \sin M = y_2 + Y_1 T_1 + Y_3 T_3$$
$$[\rho_1] T_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) = m \sin(M - \alpha_3)$$
$$[\rho_3] T_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3) = m \sin(\alpha_1 - M).$$

---

[1] Ich habe es für am vorteilhaftesten befunden, in erster Näherung ϑ'' rechts gleich Null zu setzen, also zunächst zu berechnen:

$$\sin \vartheta'' = h'' \sin^3 C'' \sin B''.$$

Bei Benützung der logarithmischen Inkremente dürfte der dritte Versuch stets nur noch eine Kontrolle des am Ende des zweiten Versuches erhaltenen, definitiven Wertes sein.

[2] Vergleiche das durch Übergang auf den zweiten heliozentrischen Ort gefundene r_2 mit dem aus (8): Wenn beide nicht übereinstimmen, dürfte der Fehler meistens in ψ liegen.

[3] Ist $\sin h_2$ negativ (und das kommt sehr häufig vor), so wähle man a'' und c'', von denen im folgenden nur das Verhältnis gebraucht wird, beide negativ. So erreicht man, daß A'' und E'' immer verhältnismäßig kleine, positive Winkel sind.

[4] $[r_2] = r_2 \cos b_2$. Man verifiziere, daß die Summe der Argumente zweier entsprechenden Sinus $\pm (\lambda_3 - \lambda_1)$ ist.

Ekliptik.	**Äquator.**
11) $r_1 \cos b_1 \cos(l_1 - L_1) = [\rho_1] \cos(\lambda_1 - L_1) + R_1$ $r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - L_1) = [\rho_1] \sin(\lambda_1 - L_1)$ $r_1 \sin b_1 = [\rho_1] \operatorname{tg} \beta_1$ $r_3 \cos b_3 \cos(l_3 - L_3) = [\rho_3] \cos(\lambda_3 - L_3) + R_3$ $r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - L_3) = [\rho_3] \sin(\lambda_3 - L_3)$ $r_3 \sin b_3 = [\rho_3] \operatorname{tg} \beta_3.$	11) $x_1 = [\rho_1] \cos \alpha_1 - X_1$ $y_1 = [\rho_1] \sin \alpha_1 - Y_1$ $z_1 = [\rho_1] \operatorname{tg} \delta_1 - Z_1$ $x_3 = [\rho_3] \cos \alpha_3 - X_3$ $y_3 = [\rho_3] \sin \alpha_3 - Y_3$ $z_3 = [\rho_3] \operatorname{tg} \delta_3 - Z_3$ Kontrollen: $x_1 T_1 + x_3 T_3 = x_2$ $y_1 T_1 + y_3 T_3 = y_2$ $z_1 T_1 + z_3 T_3 = z_2$ (!)
	12 *a)* Für alle drei Orte: [1] $s \cos \sigma = y \qquad y^e = s \cos(\sigma - \varepsilon)$ $s \sin \sigma = z \qquad z^e = s \sin(\sigma - \varepsilon)$ Proben: $y_1^e T_1 + y_3^e T_3 = y_2^e$ $z_1^e T_1 + z_3^e T_3 = z_3^e.$
	12 *b)* Für alle drei Orte: $r \cos b \cos l = x$ $r \cos b \sin l = y^e$ $r \sin b = z^e.$

12)

$$\operatorname{tg} i \sin(l_1 - \Omega) = \operatorname{tg} b_1$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l_1 - \Omega) = \frac{\operatorname{tg} b_3 - \operatorname{tg} b_1 \cos(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - l_1)}$$

Kontrollen:

$$\operatorname{tg} b_2 = \operatorname{tg} i \sin(l_2 - \Omega) \text{ (!)}$$

$$\operatorname{tg} b_3 = \operatorname{tg} i \sin(l_3 - \Omega).$$

[1] Wo ε die Schiefe der Ekliptik.

13) [1]
$$\left.\begin{aligned}\sin u_1 &= \sec i \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega) = \sin b_1 \operatorname{cosec} i\\ \sin u_2 &= \sec i \cos b_2 \sin(l_2 - \Omega) = \sin b_2 \operatorname{cosec} i\\ \sin u_3 &= \sec i \cos b_2 \sin(l_3 - \Omega) = \sin b_3 \operatorname{cosec} i\end{aligned}\right\}\text{ Kontrollen}$$

$$\cos u_1 = \cos b_1 \cos(l_1 - \Omega)$$
$$\cos u_2 = \cos b_2 \cos(l_2 - \Omega)$$
$$\cos u_3 = \cos b_3 \cos(l_3 - \Omega).$$

Ekliptik.	**Äquator.**
14 *a*) $\rho_1 = \frac{[\rho_1]}{\cos \beta_1}, \quad \rho_3 = \frac{[\rho_3]}{\cos \beta_3}.$	14 *a*) $\rho_1 = \frac{[\rho_1]}{\cos \delta_1}, \quad \rho_3 = \frac{[\rho_3]}{\cos \delta_3}$

Für alle drei Indices:

14)
$$\Delta t = c\rho = [7.76128]\,\rho$$
$$t^0 = t - \Delta t.$$

15) [2]
$$\tau'' = k''(t_3^0 - t_1^0), \qquad k'' = [3.550\,0066], \qquad W'' = \frac{\tau''}{(r_1 r_3)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\sqrt{p} = \frac{(r_1 r_3)^{\frac{1}{4}} \sin(u_3 - u_1)}{\sin W}$$

$$O_1 = \frac{p}{r_1} - 1,$$

$$O_3 = \frac{p}{r_3} - 1,$$

$$e \cos v_1 = O_1,$$

$$e \sin v_1 = \frac{O_1 \cos(u_3 - u_1) - O_3}{\sin(u_3 - u_1)},$$

$$v_2 = v_1 + (u_2 - u_1), \qquad v_3 = v_1 + (u_3 - u_1).$$

Kontrolle:

$$e \cos v_3 = O_3,$$

$$\sin \varphi = e, \qquad \Phi = 90 - \varphi, \qquad a = p \sec^2 \varphi, \qquad n'' = \frac{k''}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

[1] Da u_1, u_2 und u_3 die Grundlage für das ganze Folgende bilden, so empfiehlt es sich, als Kontrolle ihre Sinus und Kosinus getrennt zu berechnen.

[2] Der Winkel W'' wird zunächst in Bogensekunden gefunden und muß in ganz grober Annäherung mit $(u_3 - u_1)$ übereinstimmen. Man könnte übrigens ohne Nachteil die Formel für $\sqrt{p}$ auf die beiden Teilintervalle anwenden.

16) $$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = u_3 - v_3.$$

Für alle drei Orte:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \sin \frac{E}{2} = \frac{\sin \frac{v}{2}}{\sqrt{2a} \cos \frac{\phi}{2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{r}} \cos \frac{E}{2} = \frac{\cos \frac{v}{2}}{\sqrt{2a} \sin \frac{\phi}{2}}$$

$$M = E - e'' \sin E$$ [1]

$$M(E_p) = M + n''(E_p - t^0) \text{ Schlußkontrolle.}$$

Die Darstellung des mittleren Ortes wird einerseits durch die Übereinstimmung der drei auf dieselbe Epoche reduzierten, mittleren Anomalien garantiert. Ferner durch die Kontrolle tg b_2 = tgi sin (l_2 — ☊) in 12).

Anderseits muß der in (16) gefundene Wert von r_2 nahezu mit denen aus (8) und (9) übereinstimmen.[2]

Bei Benutzung des Äquators als Fundamentalebene kann man die Gauss'schen Konstanten mit Vorteil aus folgenden Formeln berechnen:

$$\left.\begin{aligned} a' \sin\left[A' + \frac{1}{2}(v_3 + v_1)\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{r_3} + \frac{x_1}{r_1}\right) \sec \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \\ a' \cos\left[A' + \frac{1}{2}(v_3 + v_1)\right] &= \frac{1}{2}\left(\frac{x_3}{r_3} - \frac{x_1}{r_1}\right) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(v_3 - v_1) \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

mit der Kontrolle:

$$x_2 = a' r_2 \sin (A' + v_2) \quad (87a)$$

und ähnlich in den anderen Koordinatenrichtungen. (Siehe Klinkerfues, Theoretische Astronomie, 2. Aufl., p. 232.)

§ 11. Beispiele für die beiden Fundamentalebenen.

Im Berliner Jahrbuch 1879 hat Tietjen ein Beispiel in zwei Näherungen gerechnet, das sich auf den Planeten (165) Loreley bezieht und sich bei Anwendung unserer Methode in einer Näherung erledigen läßt. Die Grundlagen der Rechnung sind:

1876	L Erdlänge	lg R	λ	tg β
August 9.68720	317° 47′ 6″.80	0.005 5500	321° 3′ 53″.15	8.917 1719
41.43906	348 28 20.10	0.002 5520	315 29 3.47	9.029 2790
69.44922	375 57 22.50	9.999 1780	314 24 31.40	9.061 9601

wobei statt β sogleich tg β gegeben ist.

Die sukzessiven Resultate der Rechnung sind nun die folgenden (die Nummern kennzeichnen die betreffende Operation in der Formelzusammenstellung):

1)	ϕ	146° 30′ 52″.60		τ_3	1.501 7684
2)	I	16 37 26.97		τ	1.776 4248
	K	124 59 49.57		ν_1	9.670 8908
3)	sin h_2	7.480 1349_n		ν_3	9.725 3436
4)	$\mathfrak{Z}_1$	8.982 2670		Q_1	9.395 3600
	$\mathfrak{Z}_2$	8.752 7030_n		Q_3	9.171 2718
	$\mathfrak{Z}_3$	9.252 9018_n		Π	9.041 7413
4)	τ_1	1.447 3156	6)	num E	— 0.059 11957

[1] $e'' = e\,[5.314\,4251]$.

[2] Stimmen die M und r_2 nicht ganz genügend, so lohnt es sich, vor Beginn einer zweiten Hypothese die Darstellung des mittleren Ortes zu rechnen, in der sich die Fehler aufheben können.

	num F	— 0.050 11989
	num G	— 0.002 92772
	a''	$8.792\,8813_n$
	c''	$7.961\,6584_n$
	h''	0.640 1419
	A''	+ 1° 32′ 51″93
	C''	+ 10 33 8.96
	B''	+ 9 0 17.03
7)	ϑ''	+ 0 15 59.71
8)	χ	+ 10 49 8.67
	r_2	0.470 7906
	ρ_2	0.314 9392
	V	7.629 3695
	Σ_1	0.000 4595
	Σ_3	0.000 2743
	T_1	9.673 2041
	T_3	9.727 4717
9)	$[\rho_2]$	0.312 4684
	l_2	326° 11′ 21″22
	tg b_2	8.872 1587
	r_2	0.470 7906
10)	G_1	9.022 4758
	G_3	9.162 2547
11)	tg b_1	8.733 9817
	tg b_3	8.961 8351
	r_1	0.468 9826
	r_3	0.472 6057
	l_1	319° 56′ 7″68
	l_3	331 40 29.58
12)	i	11 8 29.190
	☊	303 57 42.64
13)	u_1	16 15 51.76
	u_2	22 36 42.19
	u_3	28 9 51.34
14a)	ρ_1	0.286 6333
	ρ_3	0.373 5364

14)	num Δt_1	0.01117
	num Δt_2	0.01192
	num Δt_3	0.01364
	num t_1^0	9.67609
	num t_2^0	41.42714
	num t_3^0	69.43558
15)	τ''	5.326 4135
	W	11° 35′ 8″27
	$\sqrt{p}$	0.246 8570
	O_1	8.767 8887
	O_3	8.697 2651
	c	8.839 2257
	v_1	31° 56′ 55″48
	v_2	38 17 45.91
	v_3	43 50 55.06
	φ	3 57 35.967
	Φ	86 2 24.033
	a	0.495 7902
	n''	2.806 3213
	$\sqrt{2a}\,\sin\frac{\Phi}{2}$	0.232 3560
	$\sqrt{2a}\,\cos\frac{\Phi}{2}$	0.262 3961
16)	ω	— 15° 41′ 3″72
	r_1	0.468 9826
	r_2	0.470 7914
	r_3	0.472 6058
	E_1	29° 54′ 44″64
	E_2	35 54 22.36
	E_3	41 10 17.34
	M_1	27 56 21.20
	M_2	33 35 8.46
	M_3	38 33 59.89
	M Oktober 8.5	38 34 40.96
		38 34 40.94
		38 34 41.13

Die größte Differenz zwischen den drei auf die Epoche reduzierten mittleren Anomalien ist 0″19. Ebenso stimmt lg r_2 aus der Kepler'schen Bewegung bis auf acht Einheiten der siebenten Dezimale mit dem aus der Regula falsi folgenden Werte überein. Die erste erste Hypothese reicht hier also vollständig aus.

Durch dieses Beispiel wollte Tietjen beweisen, daß seine Methode für Gesamtintervalle von zirka zwei Monaten noch in zwei Hypothesen anwendbar ist. Dieser Schluß muß infolge des Umstandes, daß hier r_2 nahe gleich 3 ist, als ein gewagter bezeichnet werden. Bezüglich meiner Methode gilt genau dasselbe. Man kann nur sagen, daß es Beispiele gibt, in denen auch für derartige Zwischenzeiten eine Annäherung ausreicht. (Siehe § 6.)

Wir stellen schließlich Tietjen's Bahnelemente den von uns gefundenen gegenüber:

Epoche 1876, Oktober 8.5.

	Tietjen (zweite Hypothese)	
M	37° 59′ 38″5	38° 34′ 41″01
ω	345 0 1.7	344 18 56.28
☊	303 57 18.8	303 57 42.04
i	11 8 12.1	11 8 29.19
φ	3 56 30.4	3 57 35.97
n''	640″181	640″2082
$\lg a$	0.495 803	0.495 7902

Um auch für den Äquator als Fundamentalebene ein Beispiel zu haben, bestimmen wir die Bahn des Planeten (496) Gryphia aus drei Heidelberger Beobachtungen.

Die Grundlagen der Rechnung sind:

1902 Oktober	α	δ	X	Y	Z
25.566 585	55° 38′ 17″10	+17° 30′ 27″50	−0.846 0618	−0.478 6207	−0.207 6577
35.437 001	53 34 37.95	+16 34 2.90	−0.742 1546	−0.603 0662	−0.261 6450
52.384 503	49 13 29.25	+14 47 42.20	−0.514 0951	−0.773 2508	−0.335 4801

$\varepsilon = 23° \; 27' \; 7''32$

Die Sonnenkoordinaten sind schon wegen Parallaxe korrigiert.

Die Rechnung ergibt folgende Resultate:

1 *a*) K_2 . . . . 9.996 2636
D_2 . . . . — 15° 18′ 6″98
A_2 . . . . 219 5 48.86
1 *b*) ψ 166 1 18.68
2) I 28 29 48.21
K 20 6 47.30
3 *a*) $\mathfrak{x}$ 9.215 0179
$\mathfrak{y}$ . . . . 9.651 2899_n
$\mathfrak{z}$ 9.943 9120
3 *b*) $\sin h_2$ . . . . 7.194 4833_n
4) $\mathfrak{Z}_1$ . . . . 9.028 8988_n
$\mathfrak{Z}_2$ . . . . 8.911 2977_n
$\mathfrak{Z}_3$ . . . . 8.516 5724_n
5) τ_1 . . . . 1.229 1057
τ_3 . . . . 0.994 3355
τ 1.428 4251
ν_1 . . . . 9.800 6806
ν_3 . . . . 9.565 9104
Q_1 . . . . 8.590 7415_n
Q_3 . . . . 9.583 4925
Π 8.345 7418
6) num E 0.083 031 840
num F . . . . — 0.079 634 433
num G . . . . — 0.002 001 993
A'' . . . . 0° 15′ 9″05
C'' 6 17 41.17
B'' 6 2 32.12
a'' . . . . 8.929 5959_n

	c''	$7.533\,7739_n$
	h''	1.603 7424
7)	ϑ''	0° 24′ 43″10
8)	χ	6 42 24.27
	r_2	0.311 8771
	ρ_2	0.031 1960
	V	7.410 1105
	Σ_1	9.999 9565
	Σ_3	0.000 4278
	T_1	9.801 7552
	T_3	9.567 4563
9)	num x_2	+ 1.353 6269
	num y_2	+ 1.431 7566
	num z_2	+ 0.568 0251
10)	M	53° 20′ 2″23
	m	0.021 5481
	$[\rho_1]$	0.026 9999
	$[\rho_3]$	0.010 3083
11)	num x_1	+ 1.446 6836
	num y_1	+ 1.357 0587
	num z_1	+ 0.543 3366
	num x_3	+ 1.183 4751
	num y_3	+ 1.548 7179
	num z_3	+ 0.605 9432
12*a*)	y_1^e	0.164 7080
	y_2^e	0.187 3932
	y_3^e	0.220 6147
	z_1^e	$8.619\,4095_n$
	z_2^e	$8.687\,6154_n$
	z_3^e	$8.781\,5565_n$
12*b*)	r_1	0.313 1556
	r_2	0.311 8771
	r_3	0·309 8757
	l_1	45° 17′ 9″29
	l_2	48 40 36.79
	l_3	54 32 42.40
	b_1	— 1 9 35.502
	b_2	— 1 21 40.093
	b_3	— 1 41 51.806

12)	i	3° 37′ 27″826
	☊	206 38 42.93
13)	u_1	198 40 31.53
	u_2	202 4 17.57
	u_3	207 56 50.33
14*a*)	ρ_1	0.047 5986
	ρ_3	0.024 9512
14)	num Δt_1	0.006 440
	num Δt_2	0.006 201
	num Δt_3	0.006 113
	num t_1^0	25.560 145
	num t_2^0	35.430 800
	num t_3^0	52.378 390
15)	τ''	4.978 4370
	W	9° 0′ 46″18
	$\sqrt{p}$	0.167 9603
	O_1	8.730 9155
	O_3	8.791 0264
	c	8.881 9591
	v_1	— 45° 4′ 10″71
	v_2	— 41 40 24.67
	v_3	— 35 47 51.91
	φ	4 22 12.778
	Φ	85 37 47.222
	a	0.338 4498
	n''	3.042 3319
	ω	243° 44′ 42″24
	E_1	— 42 3 21·94
	E_2	— 38 50 51.14
	E_3	— 33 19 2.68
	r_1	0.313 1558
	r_2	0.311 8794
	r_3	0.309 8758
16)	M_1	— 39° 7′ 53″43
	M_2	— 36 6 32.32
	M_3	— 30 55 9.41
	M Oktober 52.5	— 30 52 55.43
		— 30 52 55.55
		— 30 52 55.35

lg r_2 aus der Schlußrechnung unterscheidet sich von dem aus der Regula falsi folgenden Werte um 23 Einheiten der siebenten Dezimale, während die drei Schlußwerte von M unter sich um 0″20 differieren. Trotzdem wird aber der mittlere Ort auf zirka ein Zehntel Bogensekunde dargestellt.

Wir stellen unser Elementensystem einem von Herrn Berberich aus denselben Beobachtungen gefundenen gegenüber.

Epoche 1902, November 21.5, Berlin.

	Berberich	
M	331° 47′ 44″7	329° 7′ 4″50
ω	240 35 0.0	243 44 42.24
☊	206 38 0.0	206 38 42.93
i	3 37 9.8	3 37 27.83
φ	4 15 29.0	4 22 12.78
n''	1103″453	1102″3815
lg a	0.338″168	0.338″4498

Herr Berberich fand als Ausgangs- und Endwerte der Dreiecksflächenverhältnisse lg T_1 und lg T_3 die folgenden, denen wir die von uns gefundenen folgen lassen:

		lg T_1	lg T_3
Berberich	Ausgangswert	9.801 979	9.567 070
	Endwert	9.801 979	9.567 080
		9.801 7552	9.567 4563

Die Bahnelemente sind in diesem Beispiele infolge der Kürze und Ungleichheit der Zwischenzeiten sowie der kleinen Neigung ziemlich unsicher.

§ 12. Bildung einer zweiten Hypothese.

Glücklicherweise dürfte man heutzutage nur selten in die Lage kommen, bei Anwendung unserer Methode zwei Hypothesen rechnen zu müssen.

Trotzdem will ich hierfür Formeln ableiten, um so mehr, als die für andere Methoden geltenden Vorschriften hier unanwendbar sind. Die Bildung einer zweiten Hypothese beruht auf Anwendung einer durch die erste Hypothese gewonnenen Erfahrung, die aber auf Betrachtung einer Kepler'schen Bewegung beruhen muß.

Das kann nun aber in sehr verschiedener Weise geschehen. Möglichste Kürze im Übergange von der ersten Hypothese auf die zweite ist schon im Interesse der Sicherheit geboten.

Wir erhalten bei Anwendung unserer Methode am Schlusse der Bahnbestimmung drei Punkte (siehe Fig. 3, p. 17[«], P_1, P_2 und P_3, welche in jeder Koordinatenrichtung folgenden Gleichungen genügen:

$$z_1 v_1 \left\{ 1 + \frac{\Pi Q_1}{(r_2)^3} \right\} + z_3 v_3 \left\{ 1 + \frac{\Pi Q_3}{(r_2)^3} \right\} = (z_2) \left\{ 1 - \frac{\Pi}{(r_2)^3} \right\}, \tag{88}$$

wobei also (z_2) die z-Koordinate von P_2 und (r_2) gleich $P_2 S$.

Durch P_1 und P_3 haben wir einen Ellipsenbogen $P_1 P_2'' P_3$ gelegt, welcher infolge der Anwendung der Näherungsformel für p nicht ganz in der durch die Beobachtungen gegebenen Zeit durchlaufen wird.

Der Punkt P_2'' soll nach seiner Definition, p. 17 [—»], in diesem Ellipsenbogen auf der Geraden SP_2 liegen. Dann ist SP_2'' derjenige Wert von r_2, den wir am Schluß der Bahnbestimmung erhalten haben, denn dort haben wir den zweiten Radius-Vektor aus den Zwischenwinkeln bestimmt.

Bezeichnen wir die heliozentrische Koordinate des Punktes P_2'' in einer beliebigen Richtung mit z_2, so ist:

$$\frac{z_2}{(z_2)} = \frac{r_2}{(r_2)} = N, \tag{89}$$

also eine bekannte Größe.

Führt man in (88) z_2 und r_2 (die also der Kepler'schen Bewegung $P_1 P_2'' P_3$ entsprechen) an Stelle von (z_2) und (r_2) ein, so erhält man:

$$z_1 \nu_1 N \left\{ 1 + \frac{N^3 \Pi Q_1}{r_2^3} \right\} + z_3 \nu_3 N \left\{ 1 + \frac{N^3 \Pi Q_3}{r_2^3} \right\} = z_2 \left\{ 1 - \frac{N^3 \Pi}{r_2^3} \right\}. \tag{90}$$

Die Gleichung (90) wird also durch die Kepler'sche Bewegung $P_1 P_2'' P_3$ tatsächlich erfüllt. Hingegen werden die Bögen $P_1 P_2''$ und $P_2'' P_3$ nicht genau in den beobachteten Zwischenzeiten durchlaufen.

Wir behalten für die zweite Hypothese die Klammern in (90) vollständig bei und beschränken uns darauf, die Größen $\nu_1 N$ und $\nu_3 N$ mit den Verhältnissen der Zwischenzeiten in der Kepler'schen Bewegung $P_1 P_2'' P_3$ in Verbindung zu setzen. Diese aber sind gegeben durch die mittleren Anomalien, die am Schluß der ersten Hypothese gefunden werden. Wir setzen also:

$$\nu_1 N = \mu_1 \frac{M_3 - M_2}{M_3 - M_1}, \qquad \nu_3 N = \mu_3 \frac{M_2 - M_1}{M_3 - M_1}. \tag{91}$$

Sind so μ_1 und μ_3 bestimmt, so setzt man in zweiter Hypothese:

$$\left.\begin{aligned} & z_1 \nu_1' \left\{ 1 + \frac{\Pi' Q_1}{r_2^3} \right\} + z_3 \nu_3' \left\{ 1 + \frac{\Pi' Q_3}{r_2^3} \right\} = z_2 \left\{ 1 - \frac{\Pi'}{r_2^3} \right\}, \\ & \text{wo } \Pi' = \Pi N^3 \text{ und} \\ & \nu_1' = \mu_1 \frac{t_3^0 - t_2^0}{t_3^0 - t_1^0}, \qquad \nu_3' = \mu_3 \frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_1^0}, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

wo t_1^0, t_2^0 und t_3^0 die reduzierten Beobachtungszeiten.

In der zweiten Hypothese treten also einfach die Größen ν_1', ν_3' und Π' an die Stelle von ν_1, ν_3 und Π, alles übrige bleibt erhalten.

Auch die Formel für $\sqrt{p}$ bedarf einer Verbesserung, die aus der ersten Hypothese abgeleitet werden kann.

Wir setzen verallgemeinernd:

$$\sqrt{p} = \frac{(r_1 r_3)^{\frac{1}{4}} \sin(u_3 - u_1)}{\sin W}, \qquad W = \frac{k''(t_3^0 - t_1^0) P}{(r_1 r_3)^{\frac{3}{4}}}, \tag{93}$$

wo also P in erster Hypothese gleich Eins ist.

Auf Grund der am Schluß der Rechnung erhaltenen Resultate ist nun aber P leicht zu bestimmen. Um von P_1 über P_2'' nach P_3 zu gelangen, braucht der Planet die Zeit:

$$\frac{M_3 - M_1}{n}.$$

Diese Größe hätte, mit P multipliziert, in obige Formel eingesetzt werden müssen.

Statt dessen hat man $P = 1$ gesetzt und statt $t_3^0 - t_1^0$ die Differenz der reduzierten Beobachtungszeiten genommen. Hieraus resultiert für die zweite Hypothese:

$$\frac{M_3 - M_1}{n} P = t_3^0 - t_1^0 \quad \text{oder:} \quad P = (t_3^0 - t_1^0) : \frac{M_3 - M_1}{n}. \tag{94}$$

Man hat also folgende Formeln zur Vorbereitung der zweiten Hypothese:

$$N = \frac{r_2 \text{ (Schlußrechnung)}}{(r_2) \text{ (Regula falsi)}}$$

$$\mu_1 = \nu_1 N \frac{M_3 - M_1}{M_3 - M_2}, \qquad \mu_3 = \nu_3 N \frac{M_3 - M_1}{M_2 - M_1},$$

wo M_1, M_2 und M_3 aus der Schlußrechnung der ersten Hypothese zu entnehmen sind:

$$\nu_1' = \mu_1 \frac{t_3^0 - t_2^0}{t_3^0 - t_1^0}, \qquad \nu_3' = \mu_3 \frac{t_2^0 - t_1^0}{t_3^0 - t_1^0},$$

$$\Pi' = \Pi N^3,$$

wo t_1^0, t_2^0, und t_3^0 die reduzierten Beobachtungszeiten der ersten Hypothese sind.

$$P = (t_3^0 - t_1^0) : \frac{M_3 - M_1}{n}.$$

ν_1', ν_3' und Π' treten also bei der zweiten Hypothese in F, G, T_1, T_3 u. s. w. an Stelle von ν_1, ν_3 und Π. Bei Berechnung des Parameters ist die Zwischenzeit zwischen erster und dritter Beobachtung mit P zu multiplizieren.

Als Beispiel für die Bahnbestimmung in zwei Hypothesen wähle ich das von Tietjen im Berliner Jahrbuche 1887 gegebene Vanadisbeispiel. Die Grundlagen der Rechnung sind:

1884 August	$L = 180 + \odot$	lg R	λ	β	tg β
27.52681	335° 2′ 11″.00	0.004 1640	336° 33′ 33″.40	−2° 21′ 11″.41	8.613 7750$_n$
57.45231	4 11 21.80	0.000 7310	330 33 31.40	−2 33 33.26	8.650 2770$_n$
105.30428	51 49 11.70	9.995 1510	332 51 12.20	−2 16 39.61	8.599 5970$_n$

Ich gebe ähnlich wie früher die hauptsächlichsten Größen und stelle, der Rechnung vorgreifend, die entsprechenden Werte in zweiter Hypothese daneben.

		Erste Hypothese	Zweite Hypothese
1)	ψ	146° 17′ 0″.68	—
2)	J	2 35 39.86	—
	K	91 28 40.26	—
3)	$\sin h_2$	7.764 3510$_n$	—
4)	$\mathfrak{Z}_1$	8.611 9428$_n$	—
	$\mathfrak{Z}_2$	8.656 0110$_n$	—
	$\mathfrak{Z}_3$	8.455 8762$_n$	—
5)	τ_1	1.679 8998	—
	τ_3	1.476 0415	—
	τ	1.890 8538	—
	ν_1	9.789 0460	9.789 0290
	ν_3	9.585 1877	9.585 4826
	Q_1	7.751 0018$_n$	—
	Q_3	9.560 0717	—
	Π	9.270 5993	9.270 9080

		Erste Hypothese	Zweite Hypothese
6)	num G	$-$ 0.003 849 593	$-$ 0.003 852 309
	num E	$-$ 0.050 133 723	—
	num F	$-$ 0.036 167 796	$-$ 0.036 174 276
	a''	$8.733\,0365_n$	$8.733\,0583_n$
	c''	$8.156\,3968_n$	$8.156\,2056_n$
	h''	0.611 9708	0.612 4925
	A''	3° 25′ 33″54	3° 25′ 32″92
	C'	13 1 44.90	13 2 5.92
	B''	9 36 11.36	9 36 33.00
7)	ϑ''	0 31 54.99	0 32 2.04
8)	χ	13 33 39.89	13 34 7.96
	r_2	0.374 9802	0.374 7354
	ρ_2	0.167 8961	0.167 4902
	V	8.145 6587	8.146 7018
	Σ_1	9.999 9658	9.999 9657
	Σ_3	0.002 2000	0.002 2053
	T_1	9.795 1282	9.795 1259
	T_3	9.593 5041	9.593 8191
9)	$[\rho_2]$	0.167 4627	0.167 0568
	l_2	$-$ 15° 54′ 21″32	$-$ 15° 53′ 53″34
	tg b_2	$8.442\,9263_n$	$8.442\,7652_n$
	r_2	0.374 9803	0.374 7354
10)	G_1	8.758 8174	8.757 1393
	G_3	8.676 8550	8.678 0306
11)	tg b_1	$8.380\,9476_n$	$8.380\,2513_n$
	tg b_3	$8.514\,4305_n$	$8.514\,6508_n$
	r_1	0.386 1752	0.385 1953
	r_3	0.358 2825	0.358 9230
	l_1	335° 55′ 38″08	335° 55′ 32″94
	l_3	358 2 30.46	358 0 7.55
12)	i	2 5 58.24	2 6 19.31
	☊	114 56 54.51	115 9 52.89
13)	u_1	220 59 52.14	220 46 48.92
	u_2	229 9 52.58	228 57 22.73
	u_3	243 6 31.84	242 51 11.21
14a)	ρ_1	0.153 5886	0.151 9128
	ρ_3	0.273 2273	0.274 0879
14)	num Δt_1	0.00822	0.00819
	num Δt_2	0.00850	0.00849
	num Δt_3	0.01083	0.01085
	num t_1^0	27.51859	27.51862
	num t_2^0	57.44381	57.44382
	num t_3^0	105.29345	105.29343

		Erste Hypothese	Zweite Hypothese
15)	τ''	5.440 8458	5.440 8116
	W	21° 11′ 36″14	21° 12′ 14″86
	$\sqrt{p}$	0.203 6387	0.202 6308
	O_1	8.697 1369	8.674 7546
	O_3	9.077 0942	9.051 5334
	e	9.303 1847	9.276 5317
	v_1	— 75° 39′ 27″59	— 75° 30′ 46″26
	v_2	— 67 29 27.15	— 67 20 12.45
	v_3	— 53 32 47.89	— 53 26 23.97
	φ	11 35 42.49	10 53 46.34
	Φ	78 24 17.51	79 6 13.66
	a	0.425 1868	0.421 0640
	n''	2.912 2264	2.918 4106
	$\sqrt{2a}\sin\frac{\Phi}{2}$	0.163 8682	0.165 0343
	$\sqrt{2a}\cos\frac{\Phi}{2}$	0.252 3639	0.248 1285
16)	ω	296° 39′ 19″73	296° 17′ 35″18
	r_1	0.386 1754	0.385 1952
	r_2	0.375 0832	0.374 7280
	r_3	0.358 2826	0.358 9230
	E_1	— 64° 41′ 43″94	— 65° 12′ 20″38
	E_2	— 57 10 21.04	— 57 37 56.16
	E_3	— 44 44 17.10	— 45 8 51.88
	M_1	— 54 17 3.74	— 55 22 24.23
	M_2	— 47 29 43.49	— 48 29 3.78
	M_3	— 36 37 56.09	— 37 28 10.56
	M August 27.5	— 54 17 18.93	— 55 22 39·66
		— 54 17 27.82	— 55 22 38.98
		— 54 17 13.97	— 55 22 39.94

Um diese Zusammenstellung zu vervollständigen, gebe ich noch die kurze Übergangsrechnung von der ersten Hypothese auf die zweite in extenso. Nach Abschluß der ersten Hypothese hat man:

(r_2) (Schlußrechnung)	0.375 0832
(r_2) (Regula falsi)	0.374 9803
N	0.000 1029
$\lg (M_3-M_1)''$	4.803 0995
n''	2.912 2264

v_1	9.789 0460
$\lg (M_3-M_2)''$	4.592 2589
v_3	9.585 1877
$\lg (M_2-M_1)''$	4.388 1057
$v_1 : (M_3-M_2)''$	5.196 7871
$N (M_3-M_1)''$	4.803 2024
$v_3 : (M_2-M_1)''$	5.197 0820
μ_1	9.999 9895
$t_3^0-t_1^0$	1.890 8392
μ_3	0.000 2844
$t_3^0-t_2^0$	1.679 8787
$\mu_1 : (t_3^0-t_1^0)$	8.109 1503
$t_2^0-t_1^0$	1.476 0374
$\mu_3 : (t_3^0-t_1^0)$	8.109 4452
v_1'	9.789 0290
v_3'	9.585 4826
N^3	0.000 3087
H	9.270 5993
H'	9.270 9080
$t_3^0-t_1^0$	1.890 8392
$(M_3-M_1)'' : n''$	1.890 8731
P	9.999 9661

Man hat also bei Berechnung von $\sqrt{p}$ vom Logarithmus der reduzierten Zwischenzeit 339 Einheiten der siebenten Dezimale abzuziehen.

In der ersten Hypothese beträgt die Differenz zwischen den beiden Werten von $\lg r_2$ aus der Regula falsi und der Schlußrechnung zirka 1000 Einheiten der siebenten Dezimale, in der zweiten 74 Einheiten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Differenz von M_3 und M_2, auf dieselbe Epoche reduziert, beträgt in der ersten Hypothese zirka 14″, in der zweiten zirka 1″0 mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Fehler sind also infolge der Rechnung der zweiten Hypothese zirka auf den 14. Teil ihres Betrages herabgesunken.

Bei sechstelliger Rechnung könnten die Residua der zweiten Hypothese zur Not auf das Konto der Unsicherheit der Rechnung gesetzt werden. Da wir aber siebenstellig gerechnet haben, so wäre, streng genommen, noch eine dritte Hypothese erforderlich.

Jedenfalls zeigt aber dieses schwierige und durchaus ungünstige Beispiel, daß bei Anwendung meiner Methode zwei Annäherungen stets genügen dürften, wenn sich die Beobachtungen nicht über mehr als zirka zwei Monate erstrecken.

Über diese Grenze hinaus würde ich dieselbe überhaupt kaum anwenden, weil dann nach § 6 jede Hoffnung aufhört, mit einer Näherung auszukommen.

Ich stelle nun noch die von Tietjen im Berliner Jahrbuch 1887 gefundenen Elemente den Resultaten unserer beiden Hypothesen zum Vergleich gegenüber.

Epoche 1884, August 27.5.

	Erste Hypothese	Zweite Hypothese	Tietjen
M	305° 42′ 39″76	304° 37′ 20″47	304° 41′ 24″1
ω	296 39 19.73	296 17 35.18	296 18 32.0
☊	114 56 54.51	115 9 52.89	115 0 7.7
i	2 5 58.24	2 6 19.31	2 6 18.2
φ	11 35 42.49	10 53 46.34	10 56 11.9
n''	817.0081	828.7253	828.0021
$\lg a$	0.425 1868	0.421 0640	0.421 317